Probabilidade II
Aula 7,5

Abril de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

Conteúdo

- Transformações de variáveis unidimensionais
- Transformações de v.a. discretas
- Transformações de v.a. contínuas
  - O método da função de distribuição
  - O método do jacobiano

Objetivos

- Seja X uma v.a. discreta ou contínua com função de probabilidade (ou densidade) conhecida. Queremos encontrar a densidade (ou função de probabilidade de Y=h(X) onde h(.) é uma uma função conhecida.

- Transformações de uma variável aleatória
  - Funções de uma variável discreta
  - Funções de uma variável contínua – o método da função de distribuição e o método do jacobiano

Transformações de uma v.a. discreta

- Exemplo 1
- Seja X o número de "caras" em três jogadas de uma moeda. A função de probabilidade de X é:

x	Pr(X =x) = f(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

- Qual a função de probabilidade de Y= 2X-1?
- Y é também uma v.a. discreta, e cada valor de X leva a um valor de Y diferente (ou seja, Y = 2X –1 é uma *função injetora*). Especificamente, os valores possíveis de Y são:

Transformações de uma v.a. discreta

- **Exemplo 1 (continuação)**

y	Pr(Y =y) = f(y)
-1	1/8
1	3/8
3	3/8
5	1/8

- **Note que o valor Y = -1 ocorre apenas quando X = 0, Y = 1 apenas quando X = 1 e assim sucessivamente.**
- **Logo, a tabela anterior nos fornece a função de probabilidade de Y, basta associar cada valor de Y ao valor correspondente(s) de X.**

Transformações de uma v.a. discreta

- **Exemplo 2**
- **Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade:**
- **f(x) = Pr(X = x) = $(1/2)^x$ onde x = 1, 2, 3, ...**
- **Seja Y = +1 se X é par, e Y = -1 se X é ímpar.**
- **Obviamente a função h(.), que relaciona X e Y *não é injetora* pois, por exemplo, todos os números pares são levados em Y = 1.**
- **Ache a função de probabilidade de Y.**

Transformações de uma v.a. discreta

- **Exemplo 2**
- **Dica: Para resolver o problema precisamos usar a série geométrica infinita:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a} \quad \text{se } |a|<1$$

- **g(1) = Pr (Y = 1) = Pr (X par) = Pr(X = 2, 4, 6, ...) = $(1/2)^2$ + $(1/2)^4$ + $(1/2)^6$ + ... =**

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} - \left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

- **Note que Pr(Y = -1) = Pr(X ímpar) = 1 - Pr(Y = 1) = 2/3**

Transformação de uma v.a. contínua

- **Objetivos**
- **Seja X uma v.a. contínua, e h(.) uma função conhecida. Então Y = h(X) é também uma v.a. e desejamos encontrar sua densidade.**
- **Dois métodos serão apresentados:**
  - **O método da função de distribuição**
  - **O método do jacobiano**
- **Cada método tem (obviamente) suas vantagens e limitações**

Método da Função de Distribuição

- Sejam X e Y = h(X) variáveis aleatórias contínuas. A densidade de Y pode ser encontrada através do seguinte procedimento:
- 1) Encontre o conjunto de todos os valores possíveis de Y.
- 2) Calcule a função de distribuição de Y, ou seja, para cada valor y da variável aleatória Y compute G(y) = Pr (Y ≤ y) escrevendo-a em termos do evento equivalente para X.
- 3) Calcule a derivada de G(y) com relação a y. Isto fornece a densidade de Y, g(y).

Método da Função de Distribuição

- Estes três passos são usualmente conhecidos como o "método da função de distribuição".
- Note que o método é bastante geral, e nenhuma condição é imposta à função h(.) que relaciona as variáveis X e Y. Por exemplo, não é necessário que esta função seja injetora.

Exemplo 3

- Seja X uma v.a. Uniforme(0,1). Seja Y = - ln (X).
- Encontre a função de distribuição e a densidade de Y.
- Solução
- Os valores possíveis de Y estão no intervalo [0, + ∞), pois quando X tende a zero, ln(X) tende a -∞, e Y tende a +∞. Também, quando X tende a 1, ln(X) = 0.
- A função de distribuição de Y é: G(y) = Pr (Y ≤ y)

= Pr (-ln X ≤ y) = Pr (ln X ≥ -y) = Pr (X ≥ e^{-y}) =

$$= \int_{e^{-y}}^{1} f(x)dx = \int_{e^{-y}}^{1} dx = 1 - e^{-y}$$

Exemplo 3

- A densidade de Y é obtida por diferenciação de G(y) com respeito a y.

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d(1-e^{-y})}{dy} = -(-1)e^{-y} = e^{-y}, y \geq 0$$

- Note que Y assim gerado é uma v.a. com densidade Exponencial e média 1.
- Este exemplo é uma aplicação importante do método da função de distribuição que pode ser utilizado na geração de variáveis aleatórias com densidade Exponencial, como mostrado a seguir.

Exemplo 3

- Logo, se X é Unif(0,1) então Y = - ln(X) é Exponencial(1).

- Qual a importância disso? Variáveis exponenciais servem para modelar tempos de duração de equipamentos, ou tempos entre ocorrências (quando o número de ocorrências é Poisson).

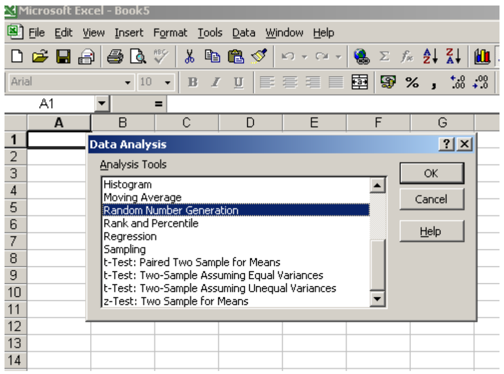
Exemplo 3

- O Excel possui um simulador para diversas distribuições de probabilidade, mas não para a Exponencial.

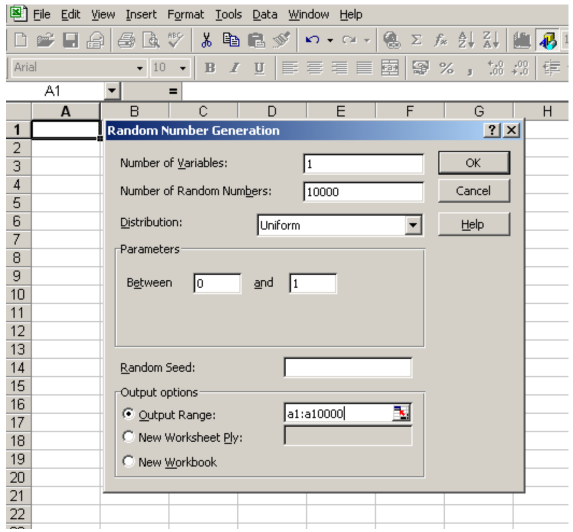
- Por que? Porque o algoritmo padrão é exatamente este que acabamos de mostrar, ou seja, é muito FÁCIL gerar variáveis exponenciais.

Exemplo 4

- Considere o exemplo anterior e suponha que geramos uma amostra aleatória de 10000 observações da densidade Unif(0,1) no Excel, como mostrado nas próximas figuras.

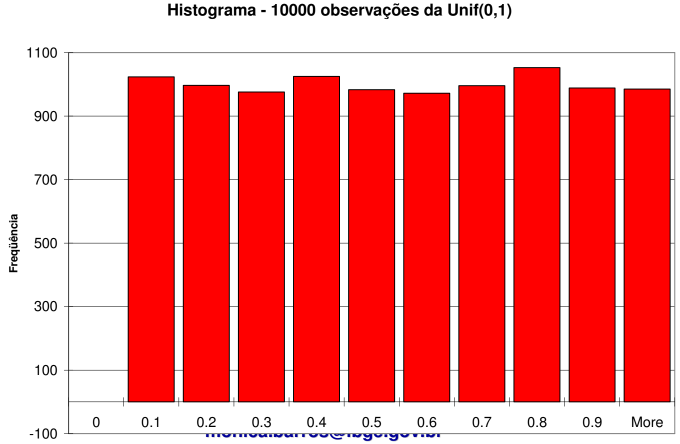


Exemplo 4



Exemplo 4

- O histograma das 10000 observações geradas é:

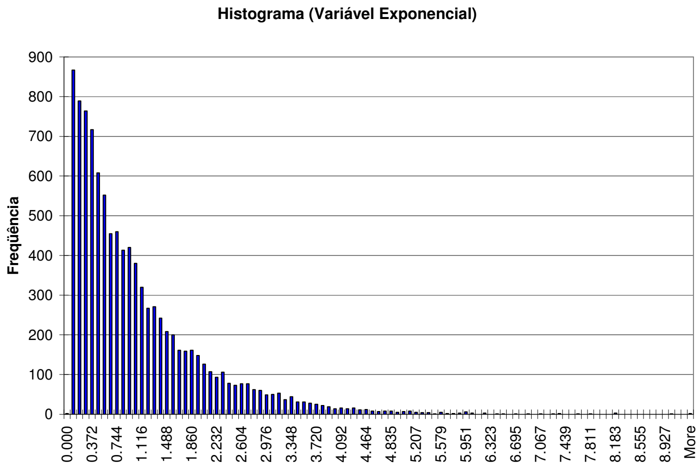


Exemplo 4

- Agora criamos uma nova coluna de 10000 observações usando a transformação Y = - ln (X) onde X é um valor gerado da distribuição Unif(0,1).

- O histograma da nova amostra deve ter um comportamento decrescente, que se "pareça" com uma densidade Exponencial com média 1. Este histograma é mostrado na próxima figura.

Exemplo 4



Exemplo 5

- Suponha que desejamos generalizar este exemplo de maneira a gerar uma v.a. Exponencial com parâmetro λ qualquer.
- Novamente, X é Unif(0,1).
- Note que a função de distribuição de X é:

$$F(x) = \Pr\left(X \le x\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Neste caso só nos interessam os valores de x entre 0 e 1.

Exemplo 5

- **Seja Y = - (1/λ).ln(X) onde λ é > 0.**
- **Qual a função de distribuição de Y? Note que Y ≥ 0 sempre.**

$$G(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(\frac{-1}{\lambda}\ln X \le y\right) = \Pr(\ln X \ge -\lambda y) =$$
$$= \Pr\left(X \ge e^{-\lambda y}\right) = 1 - \Pr\left(X \le e^{-\lambda y}\right) = 1 - e^{-\lambda y}$$

- **Mas, das propriedades da densidade Exponencial, notamos que Y assim definido é Exponencial com parâmetro λ, isto é:**

Exemplo 5

$g(y) = \lambda.\exp(-\lambda y)$ onde $y \ge 0$ e $\lambda > 0$

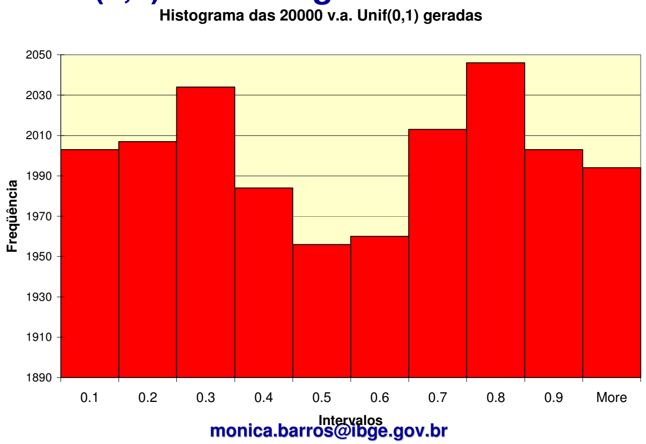
- **Logo, a transformação:**

$$Y = \frac{-1}{\lambda}\ln(X)$$

- **Gera, a partir de uma variável Unif(0,1), uma variável Exponencial com média 1/λ.**
- **No próximo "slide" exibimos uma aplicação deste resultado.**

Exemplo 5

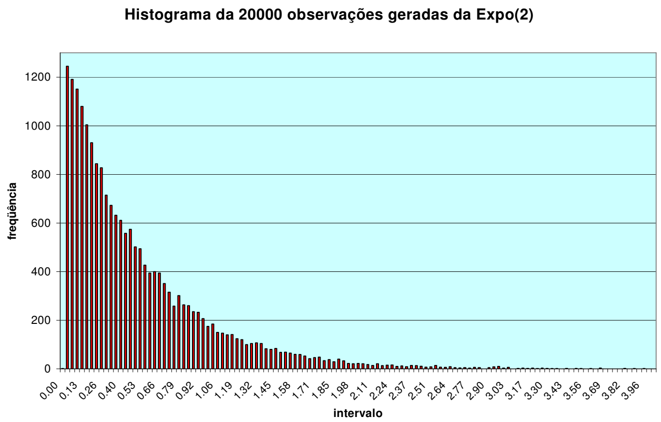
- **O histograma de 20000 observações geradas da Unif(0,1) está a seguir.**



Exemplo 5

- **A seguir está o histograma de 20000 observações geradas a partir da transformação** $Y = \frac{-1}{2}\ln(X)$ **.**
- **Estas observações devem ter densidade Exponencial com parâmetro 2.**

Exemplo 5



Exemplo 5

- Podemos calcular empiricamente algumas probabilidades e compará-las com os valores reais, obtidos da densidade Exponencial.

- O resultado teórico é: $\Pr(Y \le y) = 1 - \exp(-2y)$
- A mesma probabilidade pode ser estimada através de:

$$\Pr(Y \le y) \cong \frac{\text{número de observações geradas} \le y}{20000}$$

Método da Função de Distribuição - exemplo

y	Pr(Y<=y) empírica	Pr(Y<=y) teórica	y	Pr(Y<=y) empírica	Pr(Y<=y) teórica
0.10	18.08%	18.13%	1.20	90.87%	90.93%
0.20	33.27%	32.97%	1.30	92.53%	92.57%
0.30	45.30%	45.12%	1.40	93.94%	93.92%
0.40	54.95%	55.07%	1.50	95.08%	95.02%
0.50	63.05%	63.21%	1.75	97.12%	96.98%
0.60	69.65%	69.88%	2.00	98.28%	98.17%
0.70	75.36%	75.34%	2.25	98.91%	98.89%
0.80	79.72%	79.81%	2.50	99.32%	99.33%
0.90	83.45%	83.47%	2.75	99.58%	99.59%
1.00	86.50%	86.47%	3.00	99.77%	99.75%
1.10	88.91%	88.92%			

Método da Função de Distribuição

- A Transformação $Y = X^2$
- Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f(x) e função de distribuição F(x).
- Seja $Y = X^2$. Então a densidade de Y é:

$$\boxed{g(y) = \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]}$$

- Nota: o único cuidado que dever ser tomado ao usar esta fórmula é fazer as adaptações necessárias quando X (a variável original) for definida apenas na região $x \ge 0$ (ou $x \le 0$), pois neste caso um dos termos $\sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$ acima será nulo.

Método da Função de Distribuição

- **Demonstração**
- **A função de distribuição de Y é:**

$$G(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr(X^2 \le y) = \Pr(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) =$$
$$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

- **A densidade de Y é encontrada por diferenciação:**

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \left(\frac{y^{-1/2}}{2}\right).f(\sqrt{y}) - \left(-\frac{y^{-1/2}}{2}\right).f(-\sqrt{y}) =$$
$$= \frac{1}{2.\sqrt{y}}.f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2.\sqrt{y}}.f(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]$$

Método da Função de Distribuição

- **Exemplo 6**
- **Seja X uma v.a. contínua com densidade N(0,1):**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-x^2/2}, \text{onde x e um numero real}$$

- **Seja Y = X². Encontre a densidade de Y utilizando o teorema anterior.**

Método da Função de Distribuição

- **Exemplo 6 (continuação)**

$$g(y) = \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]$$
$$g(y) = \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(-\sqrt{y})^2/2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.y^{-1/2}e^{-y/2} \quad \text{para } y \ge 0$$

- **Esta é a densidade Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade.**

Método da Função de Distribuição

- **Vantagens e Desvantagens do Método**
- **O método da função de distribuição é bastante geral, pois pode ser empregado para transformações não injetoras.**
- **Mas muitas vezes é difícil escrever a função de distribuição de Y e derivá-la.**
- **Por isso apresentamos um método adicional para calcular a densidade de uma função de uma variável aleatória, que é chamado de método do Jacobiano. O método do Jacobiano requer que a função Y = h(X) seja injetora.**

Método do Jacobiano

- Seja X uma variável aleatória contínua definida num intervalo (a,b), com densidade f(x) e função de distribuição F(x).
- Seja Y = h(X) onde h(.) é uma função contínua e injetora (ou seja, cada x diferente é levado num y diferente).
- Então a densidade de Y, g(y), pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$g(y) = f(x).\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Método do Jacobiano

- Por que o módulo |dx/dy| aparece na fórmula anterior?
  - Para garantir que g(y) seja sempre ≥ 0, pois dx/dy pode ser negativo!
- Também, x na expressão anterior está escrito em função de y, ou seja, a variável "velha" está em função da variável "nova".

Método do Jacobiano

- Na expressão anterior, x = $h^{-1}(y)$ é expresso em termos da "nova" variável y.
- Se h(.) for uma função crescente (isto é, $x_1 \leq x_2$ implica em $h(x_1) \leq h(x_2)$) então o intervalo de valores possíveis para Y é (h(a), h(b)).
- Se h(.) é decrescente, o intervalo de definição de Y é (h(b), h(a)).

Exemplo 7

- Seja X uma variável aleatória contínua com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{\alpha}.x^{m-1}.e^{-x^m/\alpha} & \text{se } x > 0, m > 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases}$$

- Esta densidade é chamada de densidade *Weibull*, e é muito usada para modelar o tempo de duração de componentes eletrônicos.
- Seja Y = X^m . Encontre a densidade de Y.

Exemplo 7

- Note que $Y = X^m$ é injetora quando x > 0.

$$y = x^m \Leftrightarrow x = y^{1/m} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{m}.y^{\frac{1}{m}-1}$$

- Pelo método do Jacobiano, a densidade de Y é:

$$g(y) = \frac{m}{\alpha}.\left(y^{1/m}\right)^{m-1}.\exp\left\{-\frac{\left(y^{1/m}\right)^m}{\alpha}\right\}.\left[\frac{y^{\frac{1}{m}-1}}{m}\right]$$

- Após simplificações, encontramos:

$$g(y) = \frac{1}{\alpha}.e^{-y/\alpha} \quad \text{para} \quad y > 0$$

- Logo Y tem densidade Exponencial com média α.

Exemplo 8

- Seja X uma v.a. contínua que mede o preço por minuto (em centavos) de chamadas originadas de celular num certo plano. Sua densidade é:

$$f(x) = \frac{c}{x^4} \quad \text{se } 10 \le x \le 40$$

- Seja Y o volume de minutos falado (consumido) por um usuário por mês, e suponha que:

Exemplo 8

$$Y = \left\{\left(\frac{40}{X}\right)^4 + 150\right\}$$

- Encontre a constante que faz de f(x) uma densidade.
- Encontre a densidade de Y.

$$\int_{10}^{40} \frac{c}{x^4}dx = 1 \Leftrightarrow c\left\{\frac{-1}{3x^3}\right\}\Bigg|_{10}^{40} = -\frac{c}{3}\left\{\frac{1}{64000} - \frac{1}{10000}\right\} = -\frac{c}{3000}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{10}\right) =$$

$$= -\frac{c}{3000}\left(\frac{-54}{640}\right) = \frac{54c}{192(10)^4} = \frac{9c}{32(10)^4} = 1 \Rightarrow c = \frac{32(10)^4}{9}$$

Exemplo 8

- A função que relaciona X e Y é injetora no intervalo dado, então podemos usar o método do jacobiano.

- Também, quando x tende a 10, y tende a 406, e quando x tende a 40, y tende a 151. Logo, y está restrito ao intervalo [151, 406].

Exemplo 8

- O primeiro passo é encontrar a função inversa:

$$Y = \left\{ \left(\frac{40}{X} \right)^4 + 150 \right\} \Rightarrow Y - 150 = \left(\frac{40}{X} \right)^4 \Rightarrow X^4 = \frac{(40)^4}{Y - 150} \Rightarrow X = \frac{40}{(Y-150)^{1/4}}$$

- A derivada da função inversa é:

$$\frac{dX}{dY} = 40\left(\frac{-1}{4} \right)(Y-150)^{-5/4} = -10(Y-150)^{-5/4} < 0$$

- E portanto o Jacobiano da transformação é:

$$\left| \frac{dX}{dY} \right| = +10(Y-150)^{-5/4}$$

Exemplo 8

- Finalmente, a densidade de Y é:

$$g(y) = \frac{32(10)^4}{9} \frac{y-150}{(40)^4} \frac{(10)}{(y-150)^{5/4}} = \frac{320}{36} \frac{1}{(y-150)^{1/4}} \qquad 151 \le y \le 406$$

Método do Jacobiano – para casa

- A velocidade de uma molécula de gás é uma variável aleatória contínua V com densidade dada por:

$f(v) = a.v^2.e^{-bv^2}$, onde b é uma constante que depende do gás e v > 0

- E a > 0 é uma constante determinada a partir do fato de f(v) integrar a 1 no intervalo (0, + ∞). Seja Z a energia cinética da molécula de gás, dada por: $Z = \frac{mV^2}{2}$
- Encontre a densidade de Z (você pode usar o método do Jacobiano ou o da função de distribuição)

Método do Jacobiano – para casa

- A duração (Y) de componentes eletrônicos é às vezes modelada pela densidade **Rayleigh**, mostrada a seguir.

$$f(y) = \left(\frac{2y}{\theta} \right) \exp\left\{ \frac{-y^2}{\theta} \right\} \quad \text{onde } y > 0$$

- Encontre a densidade de $U = Y^2$.
- Use o resultado acima para achar a média e variância de U.

Transformações de Variáveis - para casa

- Seja X uma v.a. contínua com densidade:
- $f(x) = \frac{3}{x^4} \quad x > 1$
- Encontre a densidade de Y = 1/X

Transformações de Variáveis - para casa

- O preço de um ativo financeiro é uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = 2xe^{-x^2} \quad \text{onde } \ x > 0$$

- Mostre que $Y = X^2$ tem densidade Exponencial com média 1.