

Probabilidade II

Aula 8

Abril de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

monica.barros@ibge.gov.br

1

Conteúdo

- ❑ A regra de Bayes revisitada – exemplo extra
- ❑ Vetores Aleatórios
 - ❑ Funções de Duas Variáveis Aleatórias
 - ❑ O método do Jacobiano em Duas dimensões
 - ❑ A Densidade da Soma de Duas Variáveis Aleatórias independentes
 - ❑ A Densidade do Quociente de Duas Variáveis Aleatórias independentes
 - ❑ A Densidade do Produto de Duas Variáveis Aleatórias independentes

monica.barros@ibge.gov.br

2

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- ❑ Faremos agora um exemplo um pouquinho diferente dos da aula passada, mas que é também uma aplicação da regra de Bayes.
- ❑ Lembre-se que, no caso de X ser uma v.a. discreta a regra de Bayes torna-se:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{\sum_{\text{todo } x} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot \Pr(X=x)}{\sum_{\text{todo } x} f_{Y|X}(y|x) \cdot \Pr(X=x)}$$

monica.barros@ibge.gov.br

3

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- ❑ Exemplo
- ❑ Suponha que, condicionalmente a P = p, Y é Binomial com parâmetros n = 10 e p.
- ❑ Suponha também que P é uma variável discreta, cujos valores possíveis são 1/4, 1/2 e 3/4, e a estes valores estão associadas as probabilidades 0.3, 0.4 e 0.3 respectivamente.

monica.barros@ibge.gov.br

4

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- Pergunta-se:
- Qual a função de probabilidade marginal de Y?
- Qual a função de probabilidade condicional de P dado Y = y?

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- Solução
- O primeiro passo é escrever a conjunta de Y e P, que é dada no problema.
- Note que a forma mais fácil de escrever a marginal de P é em termos de variáveis indicadoras. Lembre-se que o indicador do evento A é:

$$I_A(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in A \\ 0 & \text{se } p \notin A \end{cases}$$

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- Então, a função de probabilidade de P pode ser escrita como:

$$f_P(p) = 0.3.I_{\{p=1/4\}} + 0.4.I_{\{p=1/2\}} + 0.3.I_{\{p=3/4\}}$$

- Assim, a função de probabilidade conjunta de Y e P é dada por:

$$f(y, p) = \binom{10}{y} p^y (1-p)^{10-y} \{0.3.I_{\{p=1/4\}} + 0.4.I_{\{p=1/2\}} + 0.3.I_{\{p=3/4\}}\} =$$

$$= \binom{10}{y} \left\{ 0.3 \left(\frac{1}{4} \right)^y \left(\frac{3}{4} \right)^{10-y} I_{\{p=1/4\}} + 0.4 \left(\frac{1}{2} \right)^y \left(\frac{1}{2} \right)^{10-y} I_{\{p=1/2\}} + 0.3 \left(\frac{3}{4} \right)^y \left(\frac{1}{4} \right)^{10-y} I_{\{p=3/4\}} \right\}$$

para $y = 0, 1, \dots, 10$ e $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- A função de probabilidade marginal de Y é apenas o somatório desta conjunta para todo p, ou seja, para os três valores possíveis de P.
- Note que isso apenas equivale a uma soma ponderada de probabilidades Binomiais, cujos fatores de ponderação são, respectivamente, 0.3, 0.4 e 0.3. No slide a seguir apresentamos as probabilidades Binomiais e a soma ponderada.

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

□ A marginal de Y é:

y	Bin(10,1/4)	Bin(10,1/2)	Bin(10,3/4)	Pr(Y=y) (marginal)
0	0.0563	0.0010	0.0000	0.0173
1	0.1877	0.0098	0.0000	0.0602
2	0.2816	0.0439	0.0004	0.1022
3	0.2503	0.1172	0.0031	0.1229
4	0.1460	0.2051	0.0162	0.1307
5	0.0584	0.2461	0.0584	0.1335
6	0.0162	0.2051	0.1460	0.1307
7	0.0031	0.1172	0.2503	0.1229
8	0.0004	0.0439	0.2816	0.1022
9	0.0000	0.0098	0.1877	0.0602
10	0.0000	0.0010	0.0563	0.0173
soma	1	1	1	1

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- E a função de probabilidade condicional de P dado $Y = y$?
- Lembre-se que P só admite 3 valores possíveis ($1/4$, $1/2$ e $3/4$) e assim esta função de probabilidade condicional só terá probabilidades diferentes de zero para estes valores de P.
- Também, o valor observado de Y deve afetar a nossa “opinião” sobre P. Por exemplo, se nas 10 repetições observamos 9 sucessos, a experiência está nos dando uma evidência bem clara de que o valor “verdadeiro” de P deve ser alto (no caso, $3/4$).

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- Como resolver isso?
- A função de probabilidade condicional de P dado $Y = y$ é apenas a conjunta (que já conhecemos) sobre a marginal de Y (que acabamos de calcular).

□ Ou seja:

$$f(1/4|Y=y) = \frac{\binom{10}{y} \left\{ 0.3 \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{10-y} \right\}}{\Pr(Y=y)}$$

$$f(1/2|Y=y) = \frac{\binom{10}{y} \left\{ 0.4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{\Pr(Y=y)}$$

$$f(3/4|Y=y) = \frac{\binom{10}{y} \left\{ 0.3 \left(\frac{3}{4}\right)^y \left(\frac{1}{4}\right)^{10-y} \right\}}{\Pr(Y=y)}$$

Para $y=0,1,\dots,10$

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- O denominador na expressão anterior foi obtido no slide 9 para cada valor possível de Y.
- Por exemplo, se $Y = 0$, a função de probabilidade condicional de P dado $Y = 0$ é:

$$f(1/4|Y=0) = \frac{\left\{ 0.3 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \right\}}{0.0173} = 0.9774$$

$$f(1/2|Y=0) = \frac{\left\{ 0.4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{0.0173} = 0.0226$$

$$f(3/4|Y=0) = \frac{\left\{ 0.3 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\}}{0.0173} = 1.65(10)^{-5}$$

Pode-se notar que isso é uma função de probabilidade, pois a soma dos valores é um e todos são não negativos

A regra de Bayes revisitada – exemplo extra

- De maneira similar, as funções de probabilidade de P dado que $Y = 9$ são:

$$f(1/4|Y = y) = \frac{10 \left\{ 0.3 \left(\frac{1}{4} \right)^9 \left(\frac{3}{4} \right)^1 \right\}}{\Pr(Y = y)} = \frac{3 \left(\frac{1}{4} \right)^9 \left(\frac{3}{4} \right)}{0.0602} = 0.0001$$

$$f(1/2|Y = y) = \frac{10 \left\{ 0.4 \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}}{\Pr(Y = y)} = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \right)^{10}}{0.0602} = 0.0649$$

$$f(3/4|Y = y) = \frac{10 \left\{ 0.3 \left(\frac{3}{4} \right)^9 \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right\}}{\Pr(Y = y)} = \frac{3 \left(\frac{3}{4} \right)^9 \left(\frac{1}{4} \right)}{0.0602} = 0.9350$$

Note que esta é também uma função de probabilidade.

Além disso, se observamos $Y = 9$, a probabilidade de $P = 3/4$ é muito alta, enquanto a dos outros valores é baixa.

Funções de Duas Variáveis Aleatórias

- Dada uma função $Y = h(X_1, X_2)$ encontre a densidade (ou função de probabilidade) de Y .
- Encontrar a função de probabilidade de Y é bem simples quando X_1 e X_2 são discretas.
- No **caso contínuo**, o método proposto para encontrar a densidade de Y é apenas uma generalização do **método do Jacobiano**, já estudado no caso univariado.

Funções de Duas Variáveis Aleatórias

- Exemplo 1 - Caso Discreto
- Suponha que X_1 e X_2 representam o número de defeitos em aparelhos produzidos por duas máquinas diferentes durante um intervalo de uma hora.
- Suponha que a função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 é dada pela tabela a seguir:

$X_1 \rightarrow$ $X_2 \downarrow$	0	1	2	3	$\Pr(X_2 = x_2)$
0	0.02	0.03	0.04	0.01	0.10
1	0.06	0.09	0.12	0.03	0.30
2	0.10	0.15	0.20	0.05	0.50
3	0.02	0.03	0.04	0.01	0.10
$\Pr(X_1 = x_1)$	0.20	0.30	0.40	0.10	

Exemplo 1

- Seja $Y = X_1 + X_2$ o número total de defeitos nos aparelhos produzidos pelas máquinas num intervalo de uma hora.
- Os valores possíveis de Y são $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$. **Como calcular a probabilidade de cada um destes valores?**
- Ou seja, como encontrar a função de probabilidade de Y ?**
- Analogamente ao caso discreto univariado, precisamos associar aos valores de Y os valores possíveis de X_1 e X_2 .

Exemplo 1

- Por exemplo, se $Y = 0$, o único evento possível para o par (X_1, X_2) é $X_1 = X_2 = 0$. Da função de probabilidade conjunta dada pela tabela anterior verificamos que a probabilidade deste evento é 0.02.
- Podemos criar uma tabela com os valores de Y e suas respectivas probabilidades. Esta tabela é a função de probabilidade de Y .
- Para facilitar a visualização incluímos também na tabela os pares (X_1, X_2) que produzem cada valor de Y .

monica.barros@ibge.gov.br

17

Funções de Duas Variáveis Aleatórias – caso contínuo

- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(X_1, X_2)$ e $Y = h_1(X_1, X_2)$ onde h_1 é uma função contínua.
- **Como encontrar a densidade de Y ?**
- 1) Crie uma variável auxiliar $Z = h_2(X_1, X_2)$. Esta função h_2 deve ser escolhida da **forma mais simples possível** para facilitar o cálculo da densidade marginal de Y a partir da conjunta de Y e Z . Frequentemente fazemos $Z = X_1$ ou $Z = X_2$.
- 2) Encontre as **funções inversas** $X_1 = u_1(Y, Z)$ e $X_2 = u_2(Y, Z)$.

monica.barros@ibge.gov.br

19

Exemplo 1

y	f(y) = Pr(Y = y)	(X ₁ , X ₂)
0	0.02	(0,0)
1	0.06+0.03 = 0.09	(0,1),(1,0)
2	0.10+0.09+0.04 = 0.23	(0,2),(1,1),(2,0)
3	0.02 + 0.15 + 0.12 + 0.01 = 0.30	(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)
4	0.03 + 0.20 + 0.03 = 0.26	(1,3),(2,2),(3,1)
5	0.04 + 0.05 = 0.09	(2,3),(3,2)
6	0.01	(3,3)

Note que $f(y)$ é realmente uma função de probabilidade, pois sua soma para todos os valores de y é 1.

monica.barros@ibge.gov.br

18

Funções de Duas Variáveis Aleatórias – caso contínuo

- 3) Encontre as **derivadas parciais** das variáveis "velhas" (X_1 e X_2) em relação às variáveis "novas" (Y e Z).
- 4) Encontre o **Jacobiano** da transformação, J , definido por:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

monica.barros@ibge.gov.br

20

Funções de Duas Variáveis Aleatórias – caso contínuo

- 5) Calcule o módulo do jacobiano, $|J|$.
- 6) Escreva a densidade conjunta de Y e Z como:
- $g(y, z) = f(x_1, x_2) \cdot |J| = f(u_1(y, z), u_2(y, z)) \cdot |J|$
- Onde $f(\cdot, \cdot)$ é a densidade conjunta de X_1 e X_2 e estas variáveis aparecem em termos das novas variáveis Y e Z.

Funções de Duas Variáveis Aleatórias – caso contínuo

- 7) A densidade de Y é obtida pela integral da conjunta em relação a Z, isto é:

$$g_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, z) dz$$

- Ao integrarmos a conjunta em relação a Z estamos "nos livrando" desta variável, pois o resultado é função apenas da variável de interesse Y.

Notas - Método do Jacobiano em duas dimensões

- **É preciso usar o mesmo número de variáveis "novas" e "velhas"**. Isso justifica a introdução da variável auxiliar Z. A integração desta variável para produzir a densidade marginal da variável de interesse Y explica porque Z deve ser escolhido da maneira mais simples possível.
- Deve-se usar o **módulo do Jacobiano** para garantir que $g(y, z)$ seja sempre uma função não negativa.

Notas - Método do Jacobiano em duas dimensões

- Muitas vezes estamos interessados em obter as densidades marginais de duas variáveis pré-especificadas Y e Z.
- Neste caso certamente não é necessário introduzir qualquer variável auxiliar.
- O método descrito anteriormente se aplica quase que da mesma maneira a variáveis discretas.

Notas - Método do Jacobiano em duas dimensões

- A única diferença é que o termo $|J|$ não existe no caso discreto, e então não é preciso calcular as derivadas parciais.
- A densidade marginal da variável de interesse Y é obtida somando-se a conjunta de Y e Z para todos os valores da variável auxiliar Z .

Exemplo 2

- Solução
- A área do alvo é $\pi \cdot r^2$. Assim, se X e Y representam as coordenadas do ponto de impacto, e se a densidade conjunta de (X, Y) é Uniforme no círculo temos:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot r^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ fora do círculo} \end{cases}$$

Exemplo 2

- Um atirador atira num alvo circular de raio r . As coordenadas do ponto de impacto estão uniformemente distribuídas no círculo. O centro do alvo corresponde às coordenadas $(0, 0)$.
- Encontre a densidade da variável $Z = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ que representa a distância entre o ponto de impacto e o centro do alvo.

Exemplo 2

- A variável de interesse é a distância do ponto de impacto à origem, definida como:
- $$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- Defina a variável auxiliar $\theta = \arctan(y/x)$. Note que a transformação inversa, que expressa x e y (coordenadas retangulares) em termos de r e θ (coordenadas polares) é:

- $x = z \cdot \cos(\theta)$

- $y = z \cdot \sin(\theta)$

Exemplo 2

- Logo, o Jacobiano da transformação é:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -z \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & z \cdot \cos \theta \end{pmatrix} = z \cdot \cos^2 \theta + z \cdot \sin^2 \theta = z$$

- Como z é maior que zero por construção, segue que $|J| = z$.
- A densidade conjunta de Z e θ é:

$$g(z, \theta) = \frac{z}{\pi \cdot r^2}, \text{ onde } 0 \leq z \leq r \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi$$

Exemplo 2

- Suponha que o raio do círculo é 2. Neste caso a marginal de Z é $g(z) = z/2$, para z definido no intervalo $[0,2]$.
- Por exemplo, a probabilidade da distância à origem estar entre $1/4$ e $3/4$ é, neste caso:

$$\Pr\left(\frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} \frac{z}{2} dz = \frac{z^2}{4} \Big|_{1/4}^{3/4} = \frac{1}{8}$$

Exemplo 2

- A densidade de Z é obtida pela integração da densidade conjunta com relação a θ .

$$g_Z(z) = \int_0^{2\pi} g(z, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{z}{\pi \cdot r^2} d\theta = \frac{2z}{r^2} \text{ onde } 0 \leq z \leq r$$

- Como exercício, mostre que a marginal de Z encontrada acima realmente integra a 1.

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- Já tratamos deste problema na aula 4 e voltamos a ele agora, apresentando de novo a fórmula da convolução.
- Note que este problema é apenas um caso particular do problema que estamos tratando, de descobrir quem é a densidade (ou função de probabilidade) de uma função de duas variáveis aleatórias.

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- **Teorema (Fórmula da Convolução)**
- Seja $Z = X + Y$ onde X e Y são variáveis **independentes** com densidade conjunta $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$.
- Então a densidade de Z é dada por:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y) \cdot f_y(y) dy$$

- E no caso discreto a função de probabilidade de Z é:

$$g(z) = \Pr(Z = z) = \sum_{\text{todo } x} f_x(x) \cdot f_y(z-x) = \sum_{\text{todo } y} f_x(z-y) \cdot f_y(y)$$

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- **Demonstração – caso contínuo**
- **Considere a transformação:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z = x + y \\ w = y \end{pmatrix}$$

- **Note que a segunda variável na transformação é apenas uma variável auxiliar, definida de uma maneira “fácil”. O nosso interesse está apenas na marginal de Z .**

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- **A transformação inversa é:**

$$x = z - w$$

$$y = w$$

- **O Jacobiano da transformação é:**

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- **Portanto, o módulo do Jacobiano também é igual a um.**
- **Assim, a densidade conjunta das novas variáveis Z e W é:**

$$g(z, w) = f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) = f_x(z-w) \cdot f_y(w)$$

- **A densidade marginal de Z , que é o que nos interessa, é:**

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-w) \cdot f_y(w) dw$$

A soma de duas variáveis aleatórias independentes

- A outra expressão para a fórmula da convolução pode ser obtida pelo método do Jacobiano se fizermos a transformação de variáveis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z = x + y \\ w = x \end{pmatrix}$$

- **VERIFIQUE!**

Distribuição do Quociente de duas v.a. independentes

- **Teorema**
 - Sejam X e Y v.a. contínuas independentes e defina $Z = X/Y$.
 - Então a densidade de Z é dada por:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z \cdot w) \cdot f_Y(w) \cdot |w| dw$$

Distribuição do Quociente de duas v.a. independentes

- **Demonstração**
- **Faça a transformação:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z = x / y \\ w = y \end{pmatrix}$$

- **A transformação inversa é:**

$$x = z \cdot w$$

$$y = w$$

Distribuição do Quociente de duas v.a. independentes

- **O Jacobiano da transformação é:**

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = w$$

- **E assim o módulo do Jacobiano é $|w|$.**

Distribuição do Quociente de duas v.a. independentes

- A densidade conjunta de Z e W é:

$$g(z, w) = f(x, y) |J| = f_X(x) \cdot f_Y(y) |J| = f_X(z \cdot w) \cdot f_Y(w) \cdot |w|$$

- A densidade marginal de Z = X/Y é:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z \cdot w) \cdot f_Y(w) \cdot |w| dw$$

Distribuição do Produto de duas v.a. independentes

- Teorema

- Sejam X e Y v.a. contínuas independentes e defina Z = X.Y.

- Então a densidade de Z é dada por:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{z}{w}\right) \cdot f_Y(w) \cdot \left|\frac{1}{w}\right| dw$$

Distribuição do Produto de duas v.a. independentes

- Demonstração

- Faça a transformação:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z = x \cdot y \\ w = y \end{pmatrix}$$

- A transformação inversa é:

$$x = z / w$$

$$y = w$$

Distribuição do Produto de duas v.a. independentes

- O Jacobiano da transformação é:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/w & -z/w^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{w}$$

- E assim o módulo do Jacobiano é $|1/w|$.

Distribuição do Produto de duas v.a. independentes

□ A densidade conjunta de Z e W é:

$$g(z, w) = f(x, y) | J | = f_X(x) \cdot f_Y(y) | J | = f_X\left(\frac{z}{w}\right) \cdot f_Y(w) \cdot \left|\frac{1}{w}\right|$$

□ A densidade marginal de Z = X.Y é:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{z}{w}\right) \cdot f_Y(w) \cdot \left|\frac{1}{w}\right| \cdot dw$$