ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Probabilidade II
Aula 9

Maio de 2009

Mônica Barros, D.Sc.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Conteúdo

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Estatísticas de Ordem

- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ um conjunto de variáveis iid (independentes e identicamente distribuídas) com densidade (ou função de probabilidade) f(x) e função de distribuição acumulada F(x).

- Suponha que ordenamos $X_1, X_2, ..., X_n$.

ENCE
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
IBGE

Estatísticas de Ordem

- Sejam:
  - $X_{(1)} = \text{mín}(X_1, X_2, ..., X_n)$,
  - $X_{(2)}$ = 2o. menor dentre $X_1, X_2, ..., X_n$,
  - ....
  - $X_{(n)} = \text{máx}(X_1, X_2, ..., X_n)$.

  - $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ são também variáveis aleatórias, e estamos interessados em descobrir qual as suas distribuições.

Estatísticas de Ordem

- Começamos este estudo pelas distribuições do mínimo e do máximo.

- A seguir fazemos uma simulação e, em seguida, obtemos a distribuição teórica correspondente aos dados simulados.

Exemplo 1

- Considere um conjunto de 10 variáveis iid com a densidade Unif(0,1).

- A seguir geramos 50000 conjuntos destas 10 variáveis.

- Isso nos permite obter 50000 valores mínimos e 50000 máximos (dentre outras variáveis).

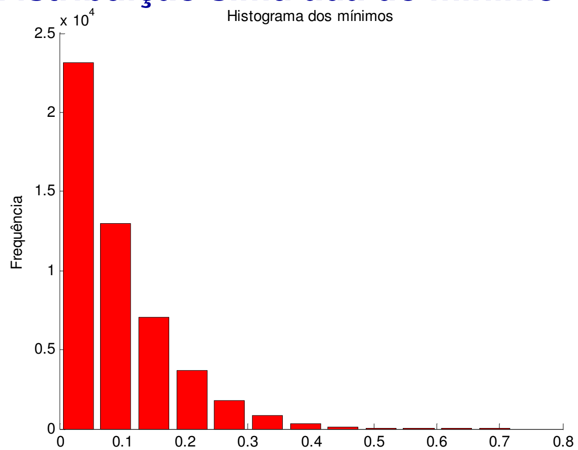
Exemplo 1

- Assim, a partir dos 50000 valores gerados, podemos tentar inferir sobre a "cara" das distribuições do mínimo e do máximo das amostras de 10 variáveis Unif(0,1).

- Também, podemos calcular a Amplitude, definida como o (máximo – mínimo), e teremos também uma aproximação para a distribuição teórica desta quantidade.

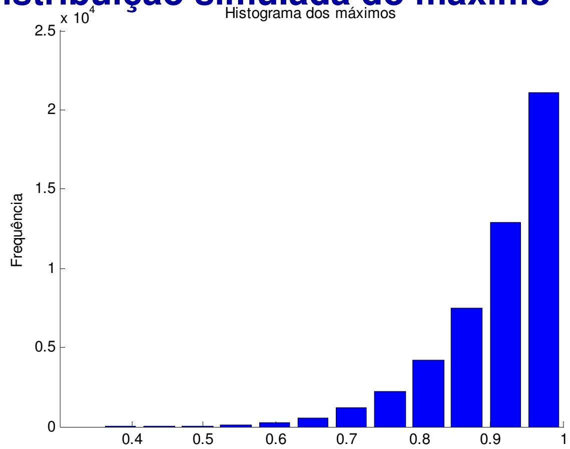
Exemplo 1

- Distribuição simulada do mínimo



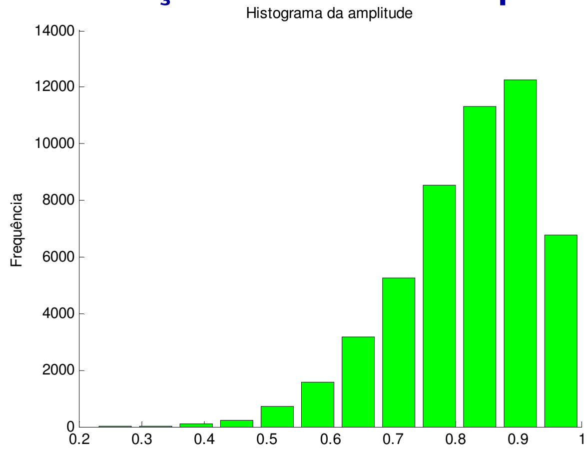
Exemplo 1

- Distribuição simulada do máximo



Exemplo 1

- Distribuição simulada da amplitude



Exemplo 1

- Estatísticas Descritivas

	MÍNIMO	MÁXIMO	AMPLITUDE
numero de amostras simuladas	50000	50000	50000
tamanho de cada amostra	10	10	10
média amostral	0.091	0.9093	0.8183
mediana amostral	0.0668	0.9328	0.8382
desvio padrao	0.0833	0.0828	0.1114
minimo	0	0.3583	0.2254
máximo	0.7218	1	0.9993

- Dos gráficos fica claro que as distribuições do máximo, mínimo e amplitude não são Unif(0,1).

- Note também que a média dos 50 mil mínimos gerados é 0.091, a mediana 0.067. Veja as outras estatísticas descritivas....

Exemplo 1

- Podemos também obter a função de distribuição empírica dos dados simulados.

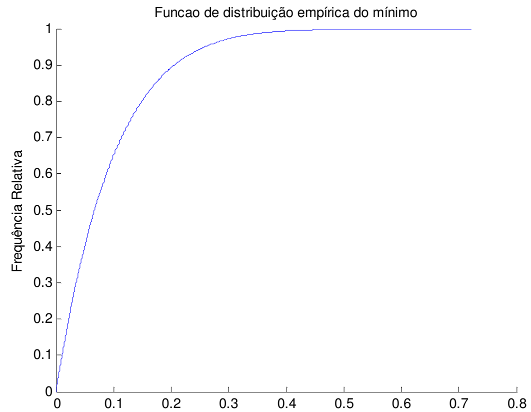
- A idéia por trás da construção da função de distribuição empírica é simples.

- Suponha que definimos uma função de probabilidade que associa o valor 1/N a cada um dos N valores observados.

Exemplo 1

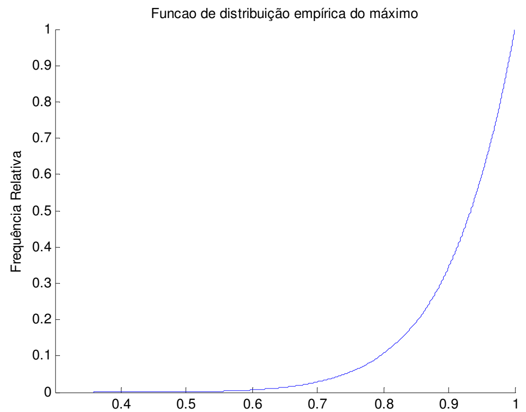
- Neste caso, geramos N = 50000 mínimos, por exemplo. Então, podemos atribuir uma probabilidade 1/50000 acada um destes mínimos observados.
- A função de distribuição empírica F* tem o aspecto de uma função degrau, e é tal que F*(x) = número de valores observados menores ou iguais a x dividido por N (N = 50000 aqui).
- Nos gráficos a seguir, a forma de "degrau" da função de distribuição empírica não fica evidente, pois foram gerados muitos valores e a função se aproxima de uma função contínua.

Exemplo 1 – distribuição empírica do mínimo

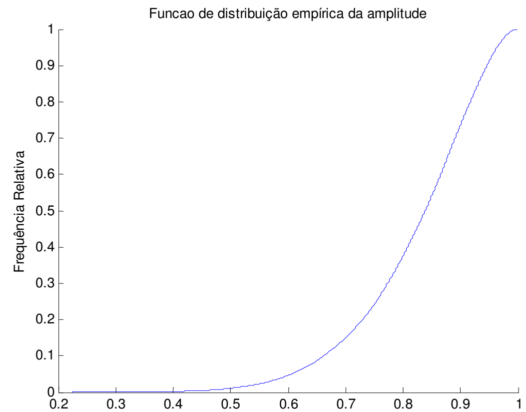


Por exemplo, cerca de 60% dos valores mínimos gerados estão abaixo de 0.1

Exemplo 1 – distribuição empírica do máximo



Exemplo 1 – distribuição empírica da amplitude



Exemplo 2

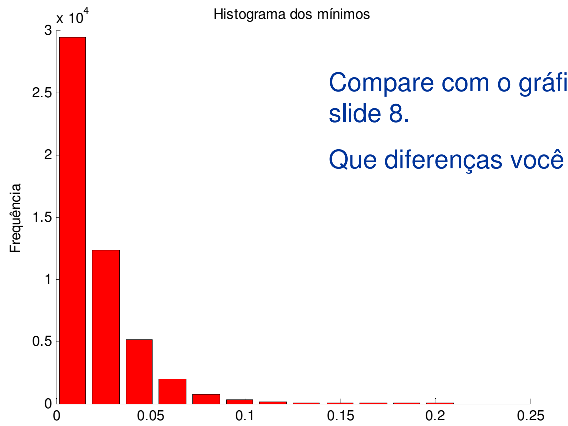
- Uma questão que deve ser investigada é:
- Como o tamanho da amostra Uniforme influi nestes resultados?
  - Parece intuitivo que, se partimos de uma amostra “grande”, o mínimo da amostra deve estar mais próximo de zero que se usarmos uma amostra “pequena”.
  - Analogamente, para uma amostra “grande”, o máximo deve estar mais perto de um que numa amostra “pequena”.

Exemplo 2

- Para verificar estas conjecturas, repetimos o experimento do Exemplo 1, mas agora geramos 50000 amostras de tamnaho 50 da Uniforme(0,1), ao invés de amostras de tamanho 10, como foi feito no exemplo anterior.
- Os resultados das simulações seguem nos próximos slides.

Exemplo 2

- Distribuição simulada do mínimo

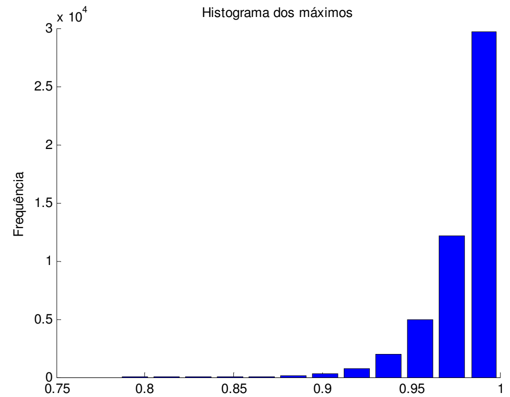


Compare com o gráfico do slide 8.

Que diferenças você nota?

Exemplo 2

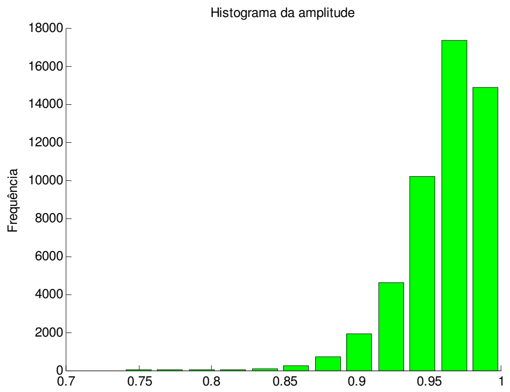
- Distribuição simulada do máximo



Compare com a figura do slide 9

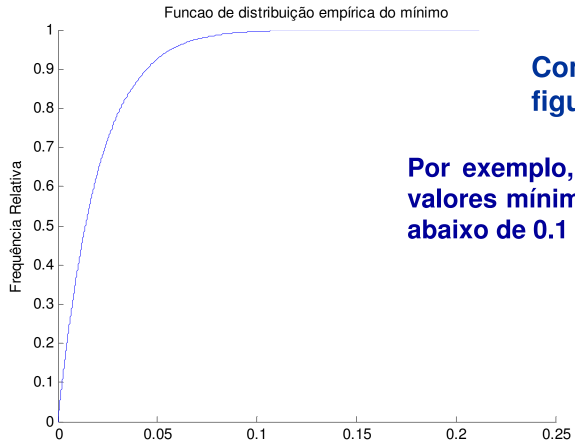
Exemplo 2

- Distribuição simulada da amplitude



Compare com a figura do slide 10

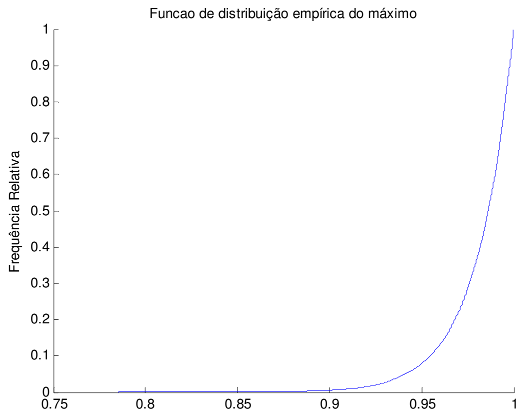
Exemplo 2 – distribuição empírica do mínimo



Compare com a figura do slide 14

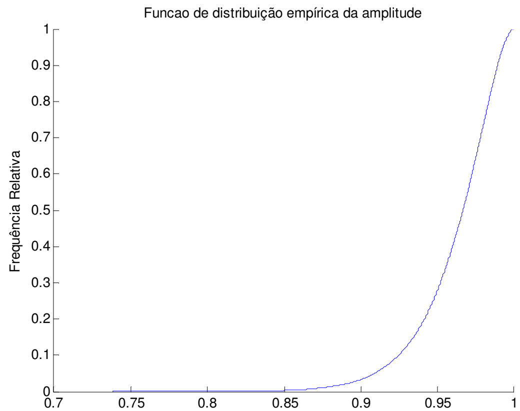
Por exemplo, quase 100% dos valores mínimos gerados estão abaixo de 0.1

Exemplo 2 – distribuição empírica do máximo



Compare com a figura do slide 15

Exemplo 2 – distribuição empírica da amplitude



Compare com a figura do slide 16

Exemplo 2

- Estatísticas descritivas

	MÍNIMO	MÁXIMO	AMPLITUDE
numero de amostras simuladas	50000	50000	50000
tamanho de cada amostra	50	50	50
média amostral	0.0195	0.9803	0.9608
mediana amostral	0.0138	0.9862	0.9666
desvio padrao	0.0189	0.0193	0.0268
minimo	0	0.7853	0.7387
máximo	0.2117	1	0.9999

a média dos 50 mil mínimos gerados é 0.020, a mediana 0.014.
Compare com as estatísticas descritivas do Exemplo 1.

Exemplo 2

- Em resumo....
  - O efeito do tamanho da amostra (n) Uniforme(0,1) é claro, como a comparação das duas simulações revela.
  - Quanto maior o tamanho da amostra, mais perto de 0 está o mínimo da amostra, e mais perto de 1 está o máximo da amostra.
  - Que conclusões você tira acerca da amplitude?

Exemplo 3

- O próximo passo é derivar analiticamente as densidades do mínimo e do máximo de uma amostra de tamanho n da Uniforme(0,1).
- Qual a distribuição do mínimo?
  - Seja $X_{(1)} = \text{mín}(X_1, X_2, ..., X_n)$

Exemplo 3

- Encontraremos a densidade de $X_{(1)}$ através do método da função de distribuição.
- Para isso, é bom recordar quem é a função de distribuição de uma variável Unif(0,1). Se U tem densidade Unif(0,1) então:

$$F(u) = \Pr(U \le u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u < 0 \\ u & \text{se } 0 \le u \le 1 \\ 1 & \text{se } u > 1 \end{cases}$$

Exemplo 3

- A função de distribuição de $X_{(1)}$ é:

$$G_1(u) = \Pr\left(X_{(1)} \le u\right) = 1 - \Pr\left(X_{(1)} > u\right) =$$
$$= 1 - \Pr\left(X_1 > u, X_2 > u, \dots, X_n > u\right)$$

- Pela independência dos X_i, esta última probabilidade pode ser escrita como o produto das probabilidades individuais e então:

Exemplo 3

$$G_1(u) = \Pr\left(X_{(1)} \le u\right) = 1 - \Pr\left(X_1 > u, X_2 > u, \dots, X_n > u\right) =$$
$$= 1 - \Pr\left(X_1 > u\right)\Pr\left(X_2 > u\right)\dots\Pr\left(X_n > u\right)$$

Mas, os X_i's são identicamente distribuídos, e então todos os termos no produto acima são iguais. Logo:

$$G_1(u) = \Pr\left(X_{(1)} \le u\right) = 1 - \Pr\left(X_1 > u\right)\Pr\left(X_2 > u\right)\dots\Pr\left(X_n > u\right) =$$
$$= 1 - \left\{\Pr\left(X_1 > u\right)\right\}^n$$

Como os X_i's são Unif(0,1) , segue que $\Pr(X_1 > u) = 1-u$. Logo:

$$G_1(u) = \Pr\left(X_{(1)} \le u\right) = 1 - \{1-u\}^n$$

Exemplo 3

- A densidade de $X_{(1)}$ é apenas a derivada da função de distribuição:

$$g_1(u) = \frac{dG_1(u)}{du} = \frac{d\left\{1 - \{1-u\}^n\right\}}{du} = -(-1)n\{1-u\}^{n-1}$$
$$= +n(1-u)^{n-1} = n.u^{1-1}(1-u)^{n-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(1)}u^{1-1}(1-u)^{n-1} \quad \text{para } 0 < \text{u} < 1$$

- Ou seja, $X_{(1)}$ tem densidade Beta(1,n). Em particular, sua média é 1/(n+1).

Exemplo 3

- Do último slide, a dependência da densidade do mínimo da amostra no tamanho da amostra deve ter ficado explícita.

- Note que, em particular, se tomarmos uma amostra de tamanho n "grande", a média dos $X_{(1)}$ se aproxima de zero.

Exemplo 3

- Por exemplo, numa amostra de tamanho 10 (vide exemplo 1), o valor esperado de $X_{(1)}$ é 1/11 = 0.0909
- Numa amostra de tamanho 50 (vide exemplo 2), a média de $X_{(1)}$ é 1/51 = 0.0196
- Compare estes valores com os encontrados nas simulações dos exemplos 1 e 2.

Exemplo 3

- Neste mesmo contexto (amostra de tamanho n da Unif(0,1)) qual a densidade do máximo?
- A função de distribuição de $X_{(n)}$ é:

$$G_n(u) = \Pr\left(X_{(n)} \le u\right) = \Pr\left(X_1 \le u, X_2 \le u, ..., X_n \le u\right) =$$
$$= \Pr\left(X_1 \le u\right)\Pr\left(X_2 \le u\right)....\Pr\left(X_n \le u\right) =$$
$$= \left\{\Pr\left(X_1 \le u\right)\right\}^n = \left\{F(u)\right\}^n = (u)^n$$

Exemplo 3

- A densidade de $X_{(n)}$ é:

$$g_n(u) = \frac{dG_n(u)}{du} = \frac{d\left\{u^n\right\}}{du} = n\{u\}^{n-1}$$
$$= n.u^{n-1}(1-u)^{1-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(1)} u^{n-1}(1-u)^{1-1} \quad \text{para } 0 < u < 1$$

Ou seja, $X_{(n)}$ é Beta(n,1). Em particular, $E\{X_{(n)}\} = n/(n+1)$

Exemplo 4

- Os resultados encontrados para o mínimo e o máximo de uma amostra Uniforme(0,1) podem ser facilmente generalizados para uma amostra de uma densidade f(x) qualquer.
- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ um conjunto de variáveis CONTÍNUAS iid (independentes e identicamente distribuídas) com densidade f(x) e função de distribuição acumulada F(x).

Exemplo 4

- Então a função de distribuição do mínimo é:

$$G_1(u) = \Pr\left(X_{(1)} \le u\right) = 1 - \Pr\left(X_1 > u\right)\Pr\left(X_2 > u\right)....\Pr\left(X_n > u\right) =$$
$$= 1 - \{1 - F(u)\}^n$$

- E a densidade do mínimo é:

$$g_1(u) = \frac{dG_1(u)}{du} = \frac{d\{1 - \{F(u)\}^n\}}{du} = -(-1)n\frac{dF(u)}{du}\{1 - F(u)\}^{n-1}$$
$$= +n.f(u)(1 - F(u))^{n-1}$$

Exemplo 4

- Analogamente, a função de distribuição do máximo é:

$$G_n(u) = \Pr\left(X_{(n)} \le u\right) = \Pr\left(X_1 \le u, X_2 \le u, ..., X_n \le u\right) =$$
$$= \Pr\left(X_1 \le u\right)\Pr\left(X_2 \le u\right)....\Pr\left(X_n \le u\right) =$$
$$= \{\Pr\left(X_1 \le u\right)\}^n = \{F(u)\}^n$$

  - E a densidade do máximo é:

$$g_n(u) = \frac{dG_n(u)}{du} = \frac{d\{F(u)^n\}}{du} = n\frac{dF(u)}{du}\{F(u)\}^{n-1} = n.f(u)\{F(u)\}^{n-1}$$

Exemplo 5

- Sejam X_1, X_2, ..., X_n um conjunto de variáveis Expo(λ).
- Encontre a densidade do mínimo destas variáveis.
- Solução
  - Lembre-se que a função de distribuição dos X's é: F(x) = 1 – exp(-λ.x) e então 1 – F(x) = exp(-λ.x)

Exemplo 5

- Dos resultados anteriores:

$$g_1(u) = +n.f(u)(1 - F(u))^{n-1} = n.\lambda.e^{-\lambda u}\{e^{-\lambda u}\}^{n-1} =$$
$$= n\lambda.e^{-n\lambda u}$$

- Assim, X(1) é Exponencial com parâmetro n.λ

Distribuição das Estatísticas de Ordem

- Teorema
- A densidade de $X_{(k)}$ a k-ésima estatística de ordem, é:

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x).F^{k-1}(x)\{1-F(x)\}^{n-k}$$

Distribuição das Estatísticas de Ordem

- Demonstração
  - Seja dx um número positivo "pequeno".
  - Então:

$$f_k(x).dx \approx \Pr\left(x \le X_{(k)} \le x + dx\right)$$

  - O evento $x \le X_{(k)} \le x + dx$ ocorre se k-1 observações são menores que x, uma observação está em [x, x + dx] e n – k observações estão acima de x + dx.
  - A probabilidade de qualquer sequência deste tipo é $f(x).\{F(x)\}^{k-1}.\{1 - F(x)\}^{n-k}.dx$ e existem $n!/\{(k-1)!1!(n-k)!\}$ sequências deste tipo.

Distribuição das Estatísticas de Ordem

- Do teorema anterior podemos descobrir facilmente quais são as distribuições de todas as estaísticas de ordem de uma amostra Uniforme(0,1), como indicado no próximo teorema.

Distribuição Beta e relação com a Uniforme(0,1)

- Teorema
- Sejam X_1, X_2, ... , X_n variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1).
- Seja $X_{(k)}$ a k-ésima estatística de ordem da amostra.
- Então $X_{(k)}$ tem densidade Beta com parâmetros k e n – k + 1.

Exemplo 6

- Um computador gera 10 números aleatórios uniformemente no intervalo (0,1). Calcule a probabilidade de que o menor destes números será maior que 0.5.
- Solução
- Pelo teorema anterior, a densidade do menor dos 10 números é uma Beta com parâmetros 1 e 10. Isto é, se Y denota este número temos:

Exemplo 6

- A densidade de Y é:

$$f(y)=\frac{\Gamma(11)}{\Gamma(1).\Gamma(10)}y^{1-1}(1-y)^{10-1}=\frac{10!}{0!9!}(1-y)^9=10(1-y)^9 \quad \text{onde } 0<y<1$$

- A probabilidade deste número exceder 0.5 é:

$$\Pr(Y>0.5)=\int_{0.5}^{1}10(1-y)^9\,dy$$

- Faça a mudança de variável: t = 1 - y $\Rightarrow$dt = -dy e se y$\rightarrow$ 0.5, t $\rightarrow$ 0.5 e se y$\rightarrow$ 1, t $\rightarrow$ 0. Logo:

$$\Pr(Y>0.5)=\int_{0.5}^{0}10t^9(-dt)=10\int_{0}^{0.5}t^9\,dt=t^{10}\Big|_0^{0.5}=(0.5)^{10}=0.0977\%$$

Distribuição Beta (para casa)

- Considere uma amostra de tamanho n > 3 da densidade Uniforme(0,1).
- Calcule, como função do tamanho da amostra, as seguintes probabilidades:

  a) De que o maior número na amostra exceda 0.8;

  b) De que o menor número na amostra seja menor que 0.2.

  c) Faça um gráfico das probabilidades nos ítens a) e b) versus n.

Distribuição Beta (para casa)

- Um computador gera 6 números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo (0,1).
- Calcule a probabilidade de que o menor destes números será maior que 0.2.
- Calcule o valor esperado do menor destes números.
- Encontre a densidade do 2o. menor destes números e calcule a sua média e variância.
- Calcule a probabilidade de que o maior destes números exceda 0.6.

Distribuição da Amplitude

- Para encontrar a distribuição da amplitude é preciso achar a distribuição conjunta do mínimo e do máximo.
- Suponha que $n \geq 2$ (pois se $n < 2$ a amplitude é zero).
- Seja $u \leq v$. Então:

Distribuição da Amplitude

- $\Pr(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y) =$
  $= \Pr(x < X_1 \leq y, x < X_2 \leq y, \ldots, x < X_n \leq y) =$
  $= \{\Pr(x < X_1 \leq y)\}^n = \{ F(y) - F(x) \}^n$

Também: $\Pr(X_{(n)} \leq y) = \{ F(y)\}^n$

Assim a função de distribuição conjunta de $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ é:

Distribuição da Amplitude

$$F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = \Pr\left(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\right) =$$
$$= \Pr\left(X_{(n)} \leq y\right) - \Pr\left(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y\right) =$$
$$= \{F(y)\}^n - \{F(y) - F(x)\}^n$$

- A densidade conjunta de $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ é dada por:

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)}{\partial x \partial y} =$$
$$= +n(n-1) f(x) f(y) \{F(y) - F(x)\}^{n-2} \quad \text{para } x \leq y$$

Distribuição da Amplitude

- A densidade conjunta é zero se $x > y$.
- A densidade da amplitude, $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ é dada por uma ligeira modificação da densidade da soma:

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(r+x) \{F(r+x) - F(x)\}^{n-2} dx & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

Distribuição da Amplitude

- **Exemplo 7**
- **Podemos aplicar o resultado do slide anterior a uma amostra de tamanho n da densidade Unif(0,1).**
- **A densidade da amplitude é:**

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ n(n-1)\int_0^{1-r}(1)(1)\{(r+x)-(x)\}^{n-2}dx = n(n-1).r^{n-2}(1-r) & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(2)}\, r^{n-1-1}(1-r)^{2-1} \quad \text{se } 0 < r < 1$$

Distribuição da Amplitude

- **Exemplo 7**
- **Ou seja, a amplitude R tem densidade Beta(n-1, 2).**
- **Sua média é:**

$$E(R) = \frac{n-1}{n-1+2} = \frac{n-1}{n+1}$$

- **Assim, quando o tamanho da amostra cresce, a amplitude se aproxima de 1.**

Distribuição da Amplitude

- **Exemplo 7**
- **Assim, para uma amostra de tamanho 10 da Unif(0,1), E(R) = 9/11 = 0.8182.**
- **Na simulação do Exemplo 1, a média da distribuição simulada foi 0.8183.**

- **Para uma amostra de tamanho 50 da Unif(0,1), E(R) = 49/51 = 0.9608, e encontramos no Exemplo 2 o mesmo valor como média amostral da distribuição simulada.**