

Teoria da Probabilidade II – Profa. Mônica Barros – semestre 2009.01
TESTE 1 – 02 de abril de 2009
SOLUÇÕES

FORMULARIO E DICAS

1) Densidade EXPONENCIAL $f(u) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot u} \quad u \geq 0$
 $E(U) = 1/\lambda \quad \text{VAR}(U) = 1/\lambda^2$

2) Densidade GAMA(α, β) $f(u) = \frac{\beta^\alpha \cdot u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta \cdot u} \quad u, \alpha, \beta \geq 0$
 $E(U) = \alpha/\beta \quad \text{VAR}(U) = \alpha / \beta^2$

3) FUNÇÃO GAMA: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt = (\alpha-1)!$ se α é inteiro > 1

4) INTEGRAIS RELEVANTES

$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \cdot \left(u - \frac{1}{a} \right)$$

$$\int u^2 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^3} \cdot (a^2 u^2 - 2 \cdot a \cdot u + 2) - \frac{2}{a^3}$$

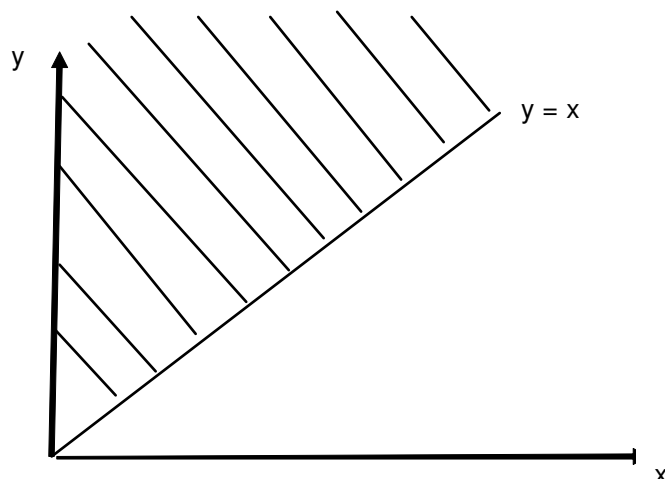
$$\int u^3 \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^4} \cdot (a^3 u^3 - 3 \cdot a^2 \cdot u^2 + 6 \cdot a \cdot u - 6) + \frac{6}{a^4}$$

Considere X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = k \cdot e^{-3 \cdot y} \quad \text{para } 0 \leq x \leq y$$

a) Ache k (Resposta: k = 9)

O domínio da densidade conjunta é a região mostrada a seguir:



Então precisamos, para que $f(x,y)$ seja uma densidade conjunta:

$$\int_0^{\infty} \int_0^y k.e^{-3y} dx dy = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} ky.e^{-3y} dy = 1$$

E usando a primeira integral das "dicas":

$$\int_0^{\infty} ky.e^{-3y} dy = \frac{k.e^{-3y}}{-3} \left(y - \frac{1}{(-3)} \right) \Big|_0^{\infty} = -\frac{ke^{-3y}}{3} \left(y + \frac{1}{3} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{-k}{3} \left(0 - 1 \left(\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{k}{9} = 1 \Rightarrow k = 9$$

b) Ache a marginal de X

$$f_X(x) = \int_x^{\infty} 9.e^{-3.y} dy = \frac{9.e^{-3.y}}{-3} \Big|_x^{\infty} = -3.e^{-3.y} \Big|_x^{\infty} = 0 + 3.e^{-3.x} = 3.e^{-3.x} \quad \text{para } x \geq 0$$

Ou seja, marginalmente X é Exponencial(3).

c) Ache a marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_0^y 9.e^{-3.y} dx = 9.e^{-3.y} \int_0^y dx = 9.y.e^{-3.y} \quad \text{para } y \geq 0$$

Ou seja, marginalmente Y é Gama($\alpha = 2$, $\beta = 3$).

d) Ache a covariância entre X e Y

$$\text{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

As médias de X e Y são dadas, já que vimos que as densidades marginais são Exponencial e Gama, respectivamente.

Assim, $E(X) = 1/3$ e $E(Y) = 2/3$

Você também poderia ter resolvido $E(X)$ e $E(Y)$ pelas definições, usando as integrais dadas na "dica", mas seria perda de tempo se você reconhecesse as densidades marginais de X e Y e usasse os resultados sobre as médias destas densidades, também mostrados nas "dicas".

Falta então resolver $E(XY)$, e como este é um valor esperado que envolve as duas variáveis ao mesmo tempo (e estas variáveis obviamente não são independentes), você deve usar a densidade conjunta (e uma integral dupla) para encontrá-lo.

$$E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^y xy.9.e^{-3y} dx dy = \int_0^{\infty} 9y.e^{-3y} \int_0^y x dx dy = \int_0^{\infty} 9ye^{-3y} \frac{y^2}{2} dy = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} y^3 e^{-3y} dy$$

Agora você tem duas opções (obviamente a resposta é a mesma). A primeira, e mais trabalhosa, é usar a última integral das "dicas". Tente – é boa prática! A segunda,

que eu mostrarei a seguir, é fazer uma pequena mudança de variáveis e transformar esta integral numa integral da função Gama, e aí o resultado sai quase que imediatamente, de uma maneira trivial. Para que seja possível usar a função Gama, é necessário que os limites da integral sejam zero e infinito, como aqui, e que a forma da função seja basicamente a mesma da função Gama, é claro.

Faça a mudança de variáveis na integral $t = 3y$. Ou seja, o termo que aparece como expoente passa a ser a variável de integração. Este é o "truque" fundamental.

Note que os limites da integral não mudam.

Também:

$dt = 3 dy$ e assim $dy = dt/3$ (você tem que levar isso em conta na mudança de variáveis).

Logo:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{9}{2} \int_0^{\infty} y^3 e^{-3y} dy = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^3 e^{-t} \frac{dt}{3} = \frac{9}{2(3)^4} \int_0^{\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{9}{2(3)^4} \int_0^{\infty} t^{4-1} e^{-t} dt = \frac{9}{2(3)^4} \Gamma(4) = \frac{9(3!)}{2(3)^4} = \\ &= \frac{9(6)}{2(81)} = \frac{6}{2(9)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Logo, a covariância entre X e Y é apenas:

$$\text{COV}(X,Y) = (1/3) - (1/3)(2/3) = (1/3)[1 - 2/3] = (1/3)(1/3) = 1/9$$

e) Ache o coeficiente de correlação entre X e Y

$$\text{CORR}(X,Y) = \frac{\text{COV}(X,Y)}{\sqrt{\text{VAR}(X)}\sqrt{\text{VAR}(Y)}} = \frac{1/9}{\sqrt{1/9}\sqrt{2/9}} = \frac{1/9}{\sqrt{2}/9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$$

f) Ache a densidade condicional de X dado $Y = y$

Por definição, a densidade condicional de X dado $Y = y$ é apenas a conjunta dividida pela marginal de Y (já calculada). Então:

$$f(x|y) = \frac{9 \cdot e^{-3y}}{9 \cdot y \cdot e^{-3y}} = \frac{1}{y} \quad \text{para } 0 \leq x \leq y$$

Ou seja, dado o valor $Y=y$, X é Uniforme no intervalo $[0,y]$.

g) Ache a média condicional de X dado $Y = y$

Pelas propriedades da densidade Uniforme:

$$E(X|Y=y) = y/2$$

h) Ache a densidade condicional de Y dado $X = x$

Analogamente ao item f), a densidade condicional de Y dado $X = x$ é apenas a conjunta dividida pela marginal de X (já calculada). Então:

$$f(y | x) = \frac{9 \cdot e^{-3y}}{3 \cdot e^{-3x}} = 3 \cdot e^{-3(y-x)} \quad \text{para } y \geq x \geq 0$$

Ou seja, dado $X = x$, a densidade de Y é uma Exponencial deslocada que, ao invés de começar em zero, começa em x .

i) Ache a média condicional de Y dado $X = x$

A média condicional de Y dado $X = x$ pode ser obtida pela definição:

$$E(Y | X = x) = \int_x^{\infty} y \cdot 3 \cdot e^{-3(y-x)} dy$$

Faça a mudança de variáveis: $t = y - x \Rightarrow dt = dy \Rightarrow$ se $y = x$ então $t = 0$ e se $y = \infty$, $t = \infty$ também.

$$E(Y | X = x) = \int_0^{\infty} 3(t+x) \cdot e^{-3t} dt = \int_0^{\infty} 3t \cdot e^{-3t} dt + x \int_0^{\infty} 3 \cdot e^{-3t} dt = \frac{1}{3} + x(1) = x + \frac{1}{3}$$

A primeira integral acima é $1/3$ pois é apenas o valor esperado de uma variável Exponencial com parâmetro 3. A segunda integral é 1 pois é a integral de uma densidade Exponencial com parâmetro 3.

Ou seja, dado $X = x$, a média condicional de Y é $1/3$ (a média de uma v.a. Exponencial(3) não deslocada, que começa em zero) + x , que representa o deslocamento, isto é, o valor a partir do qual a densidade condicional será definida.