

# Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão

## Aula 10

Mônica Barros, D.Sc.

Setembro de 2008

monica@ele.puc-rio.br

1

# Programa do Curso

| Disciplina  |              | Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão - BI MASTER 2008                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Responsável |              | Mônica Barros                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Ferramentas |              | Excel, @Risk                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Aula        | Tipo (T-P-C) | Tema                                                                                                                                                                                             | Descrição                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 1           | T, P         | Estatística Descritiva                                                                                                                                                                           | Gráficos, tabelas e medidas numéricas                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2           | T            | Probabilidade: Definições básicas                                                                                                                                                                | Definições básicas; probabilidade, espaço amostral, eventos, propriedades das probabilidades, Probabilidade Condicional, Independência, Teorema de Bayes                                                                                                                                                                                         |
| 3           | T            | Probabilidade: Definições básicas                                                                                                                                                                | Variáveis Aleatórias Contínuas e Discretas, Função de Probabilidade, Função Densidade, Função de Distribuição, Momentos de uma v.a., Média, Variância e Desvio Padrão                                                                                                                                                                            |
| 4           | T, P         | Probabilidade: Definições básicas                                                                                                                                                                | Variáveis Discretas: Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Geométrica, Binomial Negativa, Poisson                                                                                                                                                                                                                                                |
| 5           | T, P         | Probabilidade: v.a. Contínuas                                                                                                                                                                    | Variáveis Contínuas: Uniforme, Exponencial, Normal                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 6           | P            | Prática 1                                                                                                                                                                                        | Aula de exercícios - As funções do Excel para cálculo de probabilidades para v.a. Contínuas e discretas                                                                                                                                                                                                                                          |
| 7           | T, C         | Probabilidade: v.a. Contínuas E CASE 1: Simulação - soma de v.a. e o teorema central do limite CASE 2: Otimização de um portfólio simulado - propriedades da média e variância e o uso do Solver | O teorema central do limite e a importância da distribuição Normal. O teorema central do limite na prática - soma de variáveis aleatórias e a convergência para a Normal. Distribuição da soma de v.a. e da média amostral. Propriedades da média e variância de combinações lineares de v.a. - o efeito da correlação. O uso do Solver do Excel |
| 8           | T, P         | Distribuições Amostrais                                                                                                                                                                          | Amostra aleatória simples, distribuição da média amostral, distribuição de $\chi^2$                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 9           | T, P         | Estatística - estimação pontual                                                                                                                                                                  | Estimação da média da população com sigma conhecido e desconhecido e para proporções                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 10          | T/P          | Estatística - estimação por intervalos                                                                                                                                                           | Intervalos de confiança para amostras Normais e proporção Binomial - Exercícios - intervalos de confiança empregando o Excel                                                                                                                                                                                                                     |
| 11          | T/P          | Estatística - testes de hipóteses                                                                                                                                                                | Teste de hipótese para amostras normais e Exercícios                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

monica@ele.puc-rio.br

2

# Testes de Hipóteses

- ❑ Muitos problemas práticos exigem que a gente decida **aceitar ou rejeitar alguma afirmação a respeito de um parâmetro de interesse.**
- ❑ Esta afirmação é chamada de **hipótese estatística** e o procedimento de tomada de decisão é um **teste de hipóteses.**
- ❑ Muitos problemas reais podem ser formulados naturalmente como testes de hipóteses.
- ❑ Existe uma **conexão muito próxima entre Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses.**

monica@ele.puc-rio.br

3

# Testes de Hipóteses

- ❑ **Objetivo geral**
  - ❑ Inferir sobre os parâmetros desconhecidos de uma população usando uma amostra (de tamanho possivelmente reduzido).
  - ❑ **Testar hipóteses é um problema que envolve a tomada de uma decisão.**
  - ❑ **Eventualmente, após “recolhermos” (ou processarmos) a informação contida numa amostra, devemos chegar a uma conclusão sobre parâmetros não observáveis relacionados à população que gerou aquela amostra.**

monica@ele.puc-rio.br

4

## Testes de Hipóteses



- ❑ Qual o teste ideal?
  - ❑ **É aquele que sempre toma a decisão correta.** É claro que isso é uma abstração, e não existe na realidade.
- ❑ Na prática ...
  - ❑ **Procuraremos limitar a probabilidade de um certo tipo de erro, mas não se pode descartá-lo totalmente.**

monica@ele.puc-rio.br

5

## Testes de Hipóteses



- ❑ O Teste de Hipóteses é um procedimento em que procuramos testar uma hipótese inicial contra uma alternativa.
- ❑ A primeira hipótese (**hipótese inicial**) é denominada **hipótese nula** e representada por  $H_0$ .
- ❑ A segunda hipótese é chamada **hipótese alternativa** e representada por  $H_a$  ou  $H_1$ .
- ❑ Em geral a hipótese alternativa representa uma conjectura nova a ser testada, e a **hipótese nula** representa a situação usual, o "**status quo**".

monica@ele.puc-rio.br

6

## Testes de Hipóteses



- ❑ A partir dos dados observados, como podemos decidir sobre qual hipótese (nula ou alternativa) deverá ser rejeitada?
- ❑ **A rejeição da hipótese nula implica na aceitação da hipótese alternativa e vice-versa.**
- ❑ Não é possível aceitar (ou rejeitar) ambas as hipóteses simultaneamente.

monica@ele.puc-rio.br

7

## Testes de Hipóteses



- ❑ **O que é um teste de hipóteses?**
  - ❑ **É qualquer regra** usada para nos levar à decisão sobre qual hipótese devemos aceitar.
  - ❑ Podemos criar um número infinito de testes de hipóteses, o problema é identificar quais são os bons testes, e tentar obter um "algoritmo" para criar bons testes em diversas situações.
- ❑ Aqui estaremos concentrados em obter testes de hipóteses para a média de distribuições.

monica@ele.puc-rio.br

8

## Construção de um Teste de Hipóteses



### □ Teste

- Rejeitar  $H_0$  se  $T(x)$ , uma função apropriada dos  $X_i$ s da amostra, está numa região especificada  $R$ .
- Do contrário, se  $T(x)$  **não está na região  $R$ , não rejeitamos a hipótese nula.**
- A região  $R$  é chamada de **região de rejeição ou região crítica.**

## Erros do Tipo I e II



- A partir do que foi observado na amostra podemos tomar a decisão de aceitar ou rejeitar  $H_0$  e esta decisão **não é necessariamente correta**, como mostra a tabela a seguir.

| Decisão tomada →<br>Estado da realidade ↓ | Aceitar $H_0$ (Rejeitar $H_1$ ) | Rejeitar $H_0$ (Aceitar $H_1$ ) |
|-------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $H_0$ é verdadeira<br>( $H_1$ é falsa)    | DECISÃO CORRETA                 | Erro do tipo I ( $\alpha$ )     |
| $H_1$ é verdadeira<br>( $H_0$ é falsa)    | Erro do tipo II ( $\beta$ )     | DECISÃO CORRETA                 |

## Erros do Tipo I e II



- **A eficiência de um teste pode ser medida através das probabilidades dos erros de tipo I e II.**
- Idealmente gostaríamos que a probabilidade de incorrerem em qualquer tipo de erro fosse zero, mas isto não é possível .
- Para um tamanho de amostra fixo também não é possível fixarmos ambos os erros de tipo I e II. **Se reduzimos um tipo de erro, aumentamos o outro tipo (quando  $n$ , o tamanho da amostra, é fixo).**

## Erros do Tipo I e II



- $\alpha$  = Probabilidade de erro do tipo I
  - $\alpha = \Pr\{ \text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira} \}$
  - $\alpha = \Pr\{ T(x) \text{ na região crítica} \mid H_0 \text{ é verdadeira} \}$
  - $\alpha$  é chamado de tamanho do teste **ou nível de significância do teste.**
- $\beta$  = Probabilidade de erro do tipo II
  - $\beta = \Pr\{ \text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa} \}$
  - $\beta = \Pr\{ T(x) \text{ fora da região crítica} \mid H_0 \text{ é falsa} \}$

## Potência de um Teste



- ❑ **Potência do teste (ou poder do teste)**
  - ❑  $1 - \beta = 1 -$  Probabilidade de erro do tipo II
  - ❑  $1 - \beta = \Pr\{\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}\}$
- ❑ Ou seja, a potência do teste é a probabilidade de uma decisão correta!
- ❑ Idealmente, a potência de um teste seria sempre alta, mas isso não é sempre verdade.

## Função Potência



- ❑ Define-se a **função potência** como:
- ❑  $K(\theta) = \Pr\{\text{rejeitar } H_0 \mid \text{o valor do parâmetro é } \theta\}$
- ❑ **O que é uma “boa” função potência?**
- ❑ Se  $\theta$  está na região da hipótese nula, a função potência deve ser pequena (pois não queremos rejeitar  $H_0$  quando ela é verdadeira). Ao contrário, se  $\theta$  estiver na região onde a hipótese alternativa é válida, gostaríamos que a função potência fosse alta.

## Função Característica de Operação (OCC)



- ❑ É definida como:
- ❑  $J(\theta) = 1 - K(\theta) = \Pr\{\text{aceitar } H_0 \mid \text{o valor do parâmetro é } \theta\}$
- ❑ Note que, ambas  $K(\theta)$  e  $J(\theta)$  são probabilidades, e portanto limitadas ao intervalo  $[0,1]$ .
- ❑ A OCC é muito utilizada em Controle de Qualidade, mas não falaremos mais dela aqui neste curso.

## Testes de Hipóteses - intuição



- ❑ Suponha que temos uma amostra de tamanho 25 de uma Normal com variância conhecida 100 e desejamos testar as seguintes hipóteses:
  - $H_0 : \mu = 2$
  - $H_1 : \mu > 2$
- ❑ O que a nossa intuição nos diz? A média amostral,  $\bar{X}$ , é um bom estimador de  $\mu$ , e portanto deve trazer evidência sobre qual hipótese ( $H_0$  ou  $H_1$ ) é verdadeira. Imagine que observamos  $\bar{X} = 50000$ . Dados os parâmetros ( $n = 25$  e variância 100), este parece um número bem exagerado, e então  $H_0$  deve ser falsa. Logo, a nossa intuição parece apontar para a seguinte regra de decisão:

## Testes de Hipóteses - intuição



- Devemos rejeitar  $H_0$  se  $\bar{X}$  é grande.
- Ou seja, a região crítica tem a forma:

$$R = \{ \bar{X} \geq k \}$$

- A questão que surge agora é: como escolher a constante  $k$ ? Uma possibilidade é arbitrar o máximo erro do tipo I, ou seja, a maior probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira.

## Testes de Hipóteses - intuição



- Mas, esta probabilidade pode ser escrita em termos da função potência. Suponha que **FIXAMOS**  $\alpha$ , a probabilidade do erro do tipo I, isto é:

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr\{\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é Verdadeiro}\} = \\ &= \Pr\{\bar{X} \geq k | \mu = 2\} = \Pr\left\{ \frac{\bar{X} - 2}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{k - 2}{\sqrt{100/25}} \right\} = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{k - 2}{2}\right) \end{aligned}$$

- Por exemplo:

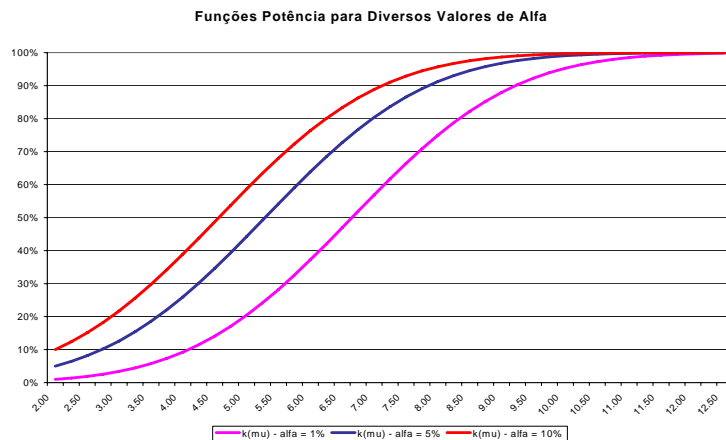
| $\alpha$ | k    | z (da N(0,1)) |
|----------|------|---------------|
| 1%       | 6.65 | 2.33          |
| 5%       | 5.29 | 1.64          |
| 10%      | 4.56 | 1.28          |

- $k$  na tabela ao lado é o valor a partir do qual rejeita-se a hipótese nula

## Testes de Hipóteses - intuição



- Vamos ver a função potência em cada um dos casos anteriores



## Testes de Hipóteses - intuição



- Conclusões
- Se  $\alpha$  é muito pequeno (erro do tipo I muito pequeno, p.ex., 1%), a região de rejeição “exige” um valor de  $k$  muito grande para rejeitar a hipótese nula neste caso, e a função potência “demora muito” a crescer.
- À medida que passamos a aceitar erros do tipo I maiores (por ex, 5% ou 10%, a função potência já começa a rejeitar a hipótese nula “com mais facilidade”, pois o valor de  $k$  diminui.

## Testes de Hipóteses - intuição



### Conclusões

- A título de exemplo, se o valor de  $\mu$  fosse 5 (e a hipótese nula decididamente falsa!), as probabilidades de rejeição usando as funções potência do exemplo seriam 20.4%, 44.8% e 58.7% respectivamente.

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- E agora, o que acontece se estendemos o nosso teste de hipótese para:

$$H_0 : \mu \leq 2$$

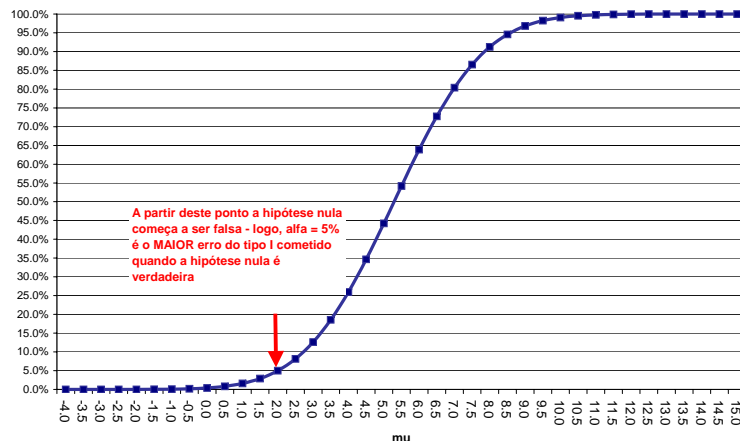
$$H_1 : \mu > 2$$

- A resposta é: basicamente nada! Por que?
- Considere a função potência para valores de  $\mu$  dentro da hipótese nula – estes valores estarão abaixo do  $\alpha$  especificado.
- O próximo gráfico mostra esta idéia para a função potência com  $k = 5.29$  (isto é,  $\alpha = 5\%$ )

## Testes de Hipóteses uni-caudais



Função Potência com  $\alpha = 5\%$



## Testes de Hipóteses uni-caudais



### Generalização

- Suponha que desejamos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

- O teste tem exatamente a forma descrita antes, em que a região de rejeição é:

$$R = \{ \bar{X} \geq k \}$$

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- ❑ Como escolher k?
- ❑ Através do erro do tipo I ( $\alpha$ ), previamente especificado, que leva às seguintes “receitas de bolo”:
- ❑ Rejeitar  $H_0$  se:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \Leftrightarrow \bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \sigma \text{ conhecido}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha \Leftrightarrow \bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \sigma \text{ desconhecido e usando a hipótese de uma amostra grande, o que possibilita o uso da Normal}$$

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- ❑ O nível de significância de um teste ( $\alpha$ ) é definido como a maior probabilidade de rejeição de  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira.
- ❑ Ou seja, o nível de significância é o maior erro do tipo I cometido pelo teste.
- ❑ No exemplo anterior,  $\alpha$  é apenas o valor da função potência em  $\mu = 2$ .

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- ❑ Suponha que agora desejamos testar as seguintes hipóteses:  
 $H_0 : \mu \geq \mu_0$   
 $H_1 : \mu < \mu_0$
- ❑ Pelos mesmos argumentos que no teste anterior, faz sentido rejeitar a hipótese nula quando a média amostral for “pequena”.
- ❑ O que é um valor “pequeno”? Vai depender do nível de significância especificado para o teste, ou seja, do erro máximo do tipo I.

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- ❑ “Receita de Bolo”
  - ❑ Rejeitar  $H_0$  se:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \Leftrightarrow \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \sigma \text{ conhecido}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha \Leftrightarrow \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \sigma \text{ desconhecido}$$

- ❑ Estes testes são válidos para amostras Normais com variância conhecida ou para amostras não necessariamente Normais de tamanho GRANDE e  $\sigma$  desconhecido. Note que estamos usando  $z_\alpha$ , que é um ponto obtido da tabela  $N(0,1)$ .

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- ❑ Exemplo
- ❑ Uma empresa produz café em pó em embalagens de 1 kg. O gerente de produção deseja saber se as embalagens realmente possuem em média 1 kg do produto e decidiu realizar um teste.
- ❑ Ele retirou uma amostra de 50 embalagens e obteve uma um peso médio de 0,985 kg de produto.
- ❑ Informações anteriores a respeito da quantidade de produto por embalagem indicaram um desvio-padrão de 0,075 kg. O gerente deseja saber, com um nível de significância de 1% se o conteúdo de cada embalagem é de, no mínimo, 1 kg.

monica@ele.puc-rio.br

29

## Teste de Hipóteses uni-caudais



- ❑ Solução: As hipóteses nula e alternativa para o teste são:

$$H_0 : \mu \geq 1$$

$$H_a : \mu < 1$$

- ▶ Para  $\alpha = 1\%$ , o valor de  $z_\alpha$  é (a partir da tabela normal) de 2.33. A região de rejeição é:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \bar{X} \leq 1 - 2.33 \frac{0.075}{\sqrt{50}} = 0.975$$

- ▶ Como a média amostral (0,985) não é menor que 0.975, a hipótese nula **não pode** ser rejeitada.
- ▶ Se  $\sigma$  não fosse conhecido, deveríamos utilizar o desvio-padrão da amostra  $s$ .

monica@ele.puc-rio.br

30

## Teste de Hipóteses uni-caudais



- ❑ A região crítica do teste anterior é:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq 0.975$$

- ❑ A função potência deste teste é então:

$$\begin{aligned} K(\mu) &= \Pr(\text{Rejeitar } H_0 | \text{a média é } \mu) = \\ &= \Pr(\bar{X} < 0.975 | \mu) = \Pr\left(\sqrt{50}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{0.075}\right) < \sqrt{50}\left(\frac{0.975 - \mu}{0.075}\right)\right) = \\ &= \Pr\left(Z < \sqrt{50}\left(\frac{0.975 - \mu}{0.075}\right)\right) = \Phi\left(\sqrt{50}\left(\frac{0.975 - \mu}{0.075}\right)\right) = \Phi\left(\sqrt{50}\left(\frac{0.975 - \mu}{0.075}\right)\right) = \\ &= \Phi(94.28(0.975 - \mu)) \end{aligned}$$

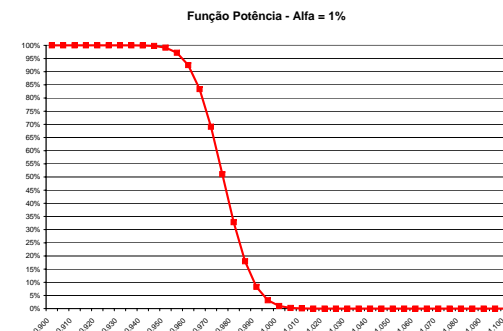
monica@ele.puc-rio.br

31

## Teste de Hipóteses uni-caudais



- ❑ Pela magnitude dos números envolvidos (tamanho da amostra grande e desvio padrão pequeno) é intuitivo perceber que qualquer pequena variação na média amostral levará a grandes oscilações da função potência, como mostrado no gráfico.



monica@ele.puc-rio.br

32

## Valor de p (“p value”)



- Muitos softwares estatísticos calculam e exibem o “**p-value**”, que é a probabilidade de que a estatística de teste tenha valor pelo menos tão extremo (muito grande ou muito pequeno) quanto o valor encontrado na amostra.
- O “**valor-p**” (p-value) indica o menor nível de significância que levaria à rejeição da hipótese nula.
- Por exemplo, se o p-value é 0.04, a hipótese  $H_0$  seria rejeitada com nível 5%, mas não com nível 1%.

## Testes de Hipóteses uni-caudais



- Uma outra forma para realizar o teste de hipótese é através do “p value”.
- A hipótese nula é rejeitada se essa probabilidade (“p value”) for menor que o nível de significância definido para o teste

Rejeitar  $H_0$  se "p value"  $< \alpha$

## Teste de hipótese bi-caudal



- Agora vamos desenvolver um teste de hipótese bi-caudal, para uma amostra grande ( $n \geq 30$ ) e  $\sigma$  da população conhecido

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

- O nível de significância  $\alpha$  é tal que, se a hipótese nula for falsa, queremos ter uma probabilidade máxima  $\alpha$  de aceitá-la, isto é, queremos cometer uma probabilidade especificada de erro do tipo I.

## Teste de hipótese bi-caudal



- Mas, intuitivamente, qual a “cara” da região crítica?
- Devemos rejeitar  $H_0$  quando estivermos “longe” de  $\mu_0$ , ou seja, quando o módulo da média amostral estiver muito distante de  $\mu_0$ .
- Suponha inicialmente que a hipótese nula seja verdadeira.
- Para uma amostra grande, podemos considerar a distribuição da média amostral como praticamente Normal (pelo teorema central do limite).

## Teste de hipótese bi-caudal



- Agora, dado um nível de significância  $\alpha$ , devemos considerar **dois** valores de Z
  - Um, abaixo do qual há uma probabilidade  $\alpha/2$  da média de uma amostra estar localizada ( $-z_{\alpha/2}$ )
  - Outro, acima do qual há uma probabilidade  $\alpha/2$  da média de uma amostra estar localizada ( $z_{\alpha/2}$ )
- **A regra de rejeição é:**

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2} \text{ ou } Z > z_{\alpha/2}$$

## Teste de hipótese bi-caudal



- Ou seja, em termos da média amostral, a região crítica pode ser descrita como:  
$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou se } \bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
- Isto é, **rejeita-se a hipótese nula se a média amostral estiver “longe” de  $\mu_0$ .**
- Note que, analogamente ao teste uni-caudal,  $\alpha$  é o nível de significância do teste, isto é, o maior erro do tipo I.

## Teste de hipótese bi-caudal



- Mas, como aqui rejeita-se a hipótese nula dos dois lados, o ponto usado da Normal é  $z_{\alpha/2}$  e não  $z_\alpha$  (que era usado nos testes uni-caudais), de tal forma que  $\Pr(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ .
- **“Receita de Bolo”** – pontos percentuais da distribuição  $N(0,1)$  para testes bi-caudais

| Testes Bi-caudais |       |
|-------------------|-------|
| $\alpha$          | Z     |
| 1%                | 2.576 |
| 5%                | 1.960 |
| 10%               | 1.645 |

## Teste de hipótese bi-caudal



- Exemplo
- Um fabricante de autopeças utiliza esferas de aço na fabricação de rolamentos. Essas esferas devem ter um diâmetro de 12 mm, caso contrário os rolamentos não atingem as especificações exigidas.
- Uma amostra de 30 rolamentos escolhidos ao acaso forneceu um diâmetro médio de 11,45 mm e um desvio-padrão de 1 mm.
- Pode-se dizer que o diâmetro médio dos rolamentos utilizados é igual a 12 mm com um nível de significância de 5%?

## Teste de hipótese bi-caudal



- **Solução:** este é um teste de hipótese bi-caudal, com  $\alpha = 0.05$ , onde:

$$H_0: \mu = 12$$

$$H_a: \mu \neq 12$$

- ▶ Para  $\alpha = 0,05$ ,  $z_{\alpha/2} = 1,96$
- ▶ Para  $\bar{X} = 11,45\text{mm}$ , temos:  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{11,45 - 12}{1 / \sqrt{30}} = -3,01$

E portanto podemos rejeitar a hipótese nula. Note que rejeitar a hipótese nula para  $Z < -1,96$  é completamente equivalente à rejeitá-la para:

$$\bar{X} < 12 - 1,96 \frac{1}{\sqrt{30}}$$

monica@ele.puc-rio.br

41

## Teste de hipótese bi-caudal



- A região crítica neste exemplo é:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} < 12 - 1,96 \frac{1}{\sqrt{30}} \text{ ou se } \bar{X} > 12 + 1,96 \frac{1}{\sqrt{30}}$$

Isto é, rejeitar  $H_0$  se:  $\bar{X} < 11,64$  ou  $\bar{X} > 12,36$

- A função potência é, neste caso (verifique!):

$$K(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{30}}{1}(12 - \mu) - 1,96\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{30}}{1}(12 - \mu) + 1,96\right)$$

- O gráfico desta função potência é mostrado na próxima página. Note que a potência (probabilidade de rejeitar a hipótese nula) cresce à medida que nos afastamos de  $\mu = 12$  e, em  $\mu = 12$ , o valor da função potência é exatamente o erro do tipo I, estipulado em 5%.

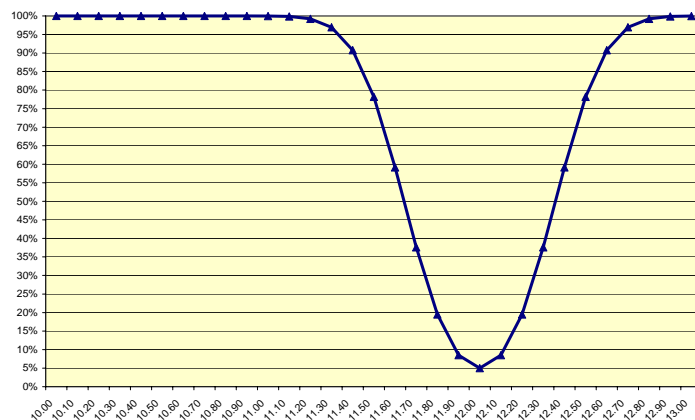
monica@ele.puc-rio.br

42

## Teste de hipótese bi-caudal



Função Potência - Teste bi-caudal



monica@ele.puc-rio.br

43

## Teste de hipótese – amostra pequena



- Até o momento, consideramos o caso de uma amostra grande ( $n \geq 30$ )
- Para  $n < 30$  existem as seguintes possibilidades:
  - A população é Normal e  $\sigma$  é conhecido: utilizamos o mesmo procedimento que para o caso de  $n \geq 30$ , com  $\sigma$  conhecido (use a distribuição Normal)
  - A população é normalmente distribuída e  $\sigma$  não é conhecido: utilizamos o mesmo procedimento que para o caso de  $n \geq 30$ , utilizando  $s$  como estimador de  $\sigma$  e a distribuição  $t$  ao invés da Normal
  - A população não é normalmente distribuída: aumentamos o tamanho da amostra pois não é possível usar uma aproximação Normal.

monica@ele.puc-rio.br

44

## Teste de hipótese – amostra pequena



- ❑ Exemplo
- ❑ Uma revista decidiu realizar uma pesquisa sobre a qualidade de serviço em grandes aeroportos ao redor do mundo.
- ❑ O nível de serviço de um aeroporto é considerado superior se a nota obtida é igual ou superior a 7. Para o aeroporto de Heathrow, em Londres, foram entrevistadas 12 pessoas que atribuíram as seguintes notas: 7, 8, 10, 8, 6, 9, 6, 7, 7, 8, 9, e 8.
- ❑ Determine, com um nível de significância de 5%, se o serviço do aeroporto de Heathrow pode ser considerado superior. Suponha que a população é normalmente distribuída.

monica@ele.puc-rio.br

45

## Teste de hipótese – amostra pequena



- ❑ Solução: As hipóteses nula e alternativa para o teste são:

$$H_0 : \mu < 7$$

$$H_a : \mu \geq 7$$

- ▶ Com uma população normal,  $n < 30$  e  $\sigma$  desconhecido, utilizaremos  $s$  e a distribuição  $t$  com 11 graus de liberdade para o teste.
- ▶ A média da amostra é 7,75 e  $s = 1,215$
- ▶ O valor de  $t_\alpha$  para o teste é 1,796
- ▶ A regra de rejeição é:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha \Rightarrow t = \frac{7,75 - 7}{1,215/\sqrt{12}} = 2,14 > t_\alpha = 1,796$$

- ▶ Logo, existe evidência para rejeitar a hipótese nula!

monica@ele.puc-rio.br

46

## Teste de hipótese – amostra pequena



- ❑ Exemplo
- ❑ Historicamente, a comissão média paga por pessoas físicas para operações em bolsa de valores através de internet numa corretora é R\$15.
- ❑ Neste mês você fez uma pesquisa com 16 clientes da corretora e notou que a comissão média foi de R\$ 10 e o desvio padrão R\$ 6. Com nível de significância 10%, há evidência para afirmar que a comissão neste mês foi mais baixa que historicamente? E com nível de significância 5%? Suponha que os valores pagos são Normalmente distribuídos.

monica@ele.puc-rio.br

47

## Teste de hipótese – amostra pequena



- ❑ Desejamos testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 15$$

$$H_1 : \mu < 15$$

- ❑ A região crítica tem a forma: rejeitar  $H_0$  se a média amostral é pequena, e como o tamanho da amostra é pequeno devemos usar a distribuição  $t$  de Student.

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq \mu_0 - t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ou seja :

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq 15 - t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{6}{\sqrt{16}}$$

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq 15 - t_{15,\alpha}(1.5)$$

monica@ele.puc-rio.br

48

## Teste de hipótese – amostra pequena



### □ Do Excel:

□ Para o teste com nível 5% usamos  $t_{15,0.05} = \text{INVT}(0.10,15) = 1.753$

□ Para o teste com nível 1% usamos  $t_{15,0.01} = \text{INVT}(0.02,15) = 2.602$

□ Região crítica a 5%:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq \mu_0 - t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ou seja :

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq 15 - t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{6}{\sqrt{16}}$$

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X} \leq 15 - t_{15,\alpha}(1.5)$$