

Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão

Aula 2
Mônica Barros, D.Sc.

Julho de 2008

monica@ele.puc-rio.br

1

Programa do Curso

Disciplina		Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão - BI MASTER 2008	
Responsável		Mônica Barros	
Ferramentas		Excel, @Risk	
Aula	Tipo (T-P-C)	Tema	Descrição
1	T, P	Estatística Descritiva	Gráficos, tabelas e medidas numéricas
2	T	Probabilidade: Definições básicas	Definições básicas; probabilidade, espaço amostral, eventos, propriedades das probabilidades, Probabilidade Condicional, Independência, Teorema de Bayes
3	T	Probabilidade: Definições básicas	Variáveis Aleatórias Contínuas e Discretas, Função de Probabilidade, Função Densidade, Função de Distribuição, Momentos de uma v.a., Média, Variância e Desvio Padrão
4	T, P	Probabilidade: Definições básicas	Variáveis Discretas: Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Geométrica, Binomial Negativa, Poisson
5	T, P	Probabilidade: v.a. Contínuas	Variáveis Contínuas: Uniforme, Exponencial, Normal
6	P	Prática 1	Aula de exercícios - As funções do Excel para cálculo de probabilidades para v.a. Contínuas e discretas
7	T, C	Probabilidade: v.a. Contínuas E CASE 1: Simulação - soma de v.a. e o teorema central do limite CASE 2: Otimização de um portfólio simulado - propriedades da média e variância e o uso do Solver	O teorema central do limite e a importância da distribuição Normal. O teorema central do limite na prática - soma de variáveis aleatórias e a convergência para a Normal. Distribuição da soma de v.a. e da média amostral. Propriedades da média e variância de combinações lineares de v.a. - o efeito da correlação. O uso do Solver do Excel
8	T, P	Distribuições Amostrais	Amostra aleatória simples, distribuição da média amostral, distribuição de p^k
9	T, P	Estatística - estimação pontual	Estimação da média da população com sigma conhecido e desconhecido e para proporções
10	T/P	Estatística - estimação por intervalos	Intervalos de confiança para amostras Normais e proporção Binomial - Exercícios - intervalos de confiança empregando o Excel
11	T/P	Estatística - testes de hipóteses	Teste de hipótese para amostras normais e Exercícios

monica@ele.puc-rio.br

2

Definições básicas – Introdução à Probabilidade

monica@ele.puc-rio.br

3

Probabilidades – Introdução

- ❑ Probabilidade faz parte do nosso dia a dia, por exemplo:
 - ❑ “A previsão da meteorologia é de **(grande chance de)** chuvas ao final do dia”
 - ❑ “O Flamengo possui **(MUITAS!!!) chances matemáticas** de chegar à final”
 - ❑ A **probabilidade** do candidato XYZ chegar ao 2o. Turno das eleições presidenciais é pequena...
 - ❑ A **probabilidade** da taxa SELIC cair na próxima reunião do COPOM é alta...

monica@ele.puc-rio.br

4

Probabilidades – Introdução



- ❑ Em resumo: estamos SEMPRE falando sobre probabilidades no nosso dia a dia, **resta saber como quantificá-las**, e quais os MODELOS mais comuns na prática.
- ❑ Na terminologia usual, a probabilidade reflete a chance de um determinado evento ocorrer.
- ❑ Quanto maior a probabilidade, maior a chance de ocorrência de um acontecimento.
- ❑ **IMPORTANTE: probabilidade é um número entre 0 e 1 sempre!**

Experiência Aleatória



- ❑ **E por que é necessário estudar probabilidades?**
 - ❑ Sempre que lidamos com experiências aleatórias, ou seja, toda vez em que o “mundo” não é determinístico (quase sempre...)
- ❑ **Experiência aleatória**
 - ❑ **Aquela cujo resultado não pode ser conhecido antes da realização da mesma**, por exemplo:
 - ❑ O resultado da jogada de um dado;
 - ❑ O número de carros que passam num posto de pedágio num intervalo de meia hora;
 - ❑ A cotação do dólar em 02/03/2005;
 - ❑ Os números que vão “sair” no concurso da Mega-Sena da próxima semana;
 - ❑ A carga no Sudeste às 18 horas de amanhã.

Experiência Aleatória



- ❑ Mas... note que, **embora você não saiba exatamente qual o resultado da experiência aleatória, também não existe ignorância completa sobre o assunto!!!**
 - ❑ No exemplo da jogada do dado, é claro que os resultados possíveis são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, as faces do dado;
 - ❑ No caso da Mega-Sena, o conjunto de valores possíveis são os 6 números sorteados no conjunto $\{0, \dots, 50\}$ e nos outros exemplos podemos estabelecer um intervalo de valores máximos e mínimos!

Espaço Amostral



- ❑ **É o conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.**
 - ❑ Total de nomes da lista telefônica do Rio de Janeiro (???)
 - ❑ Valores entre R\$ 1.50 e R\$ 150 (cotação do dólar em 02/03/2007)
 - ❑ Uma moeda é jogada 3 vezes, e observamos a seqüência de caras (H) e coroas (T). O espaço amostral é $S = \{ HHH, THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT \}$
 - ❑ Uma lâmpada é fabricada e testada até queimar, e registra-se o tempo de ocorrência deste evento. O espaço amostral é $S = \{ x : x > 0 \}$
 - ❑ **O espaço amostral será denotado aqui por S.**

Evento



- É um conjunto de **possíveis resultados de uma experiência**, isto é, um subconjunto do espaço amostral.
 - Nomes na lista telefônica que comecem com P e tenham 5 letras
 - Cotação do dólar entre R\$ 3.50 e R\$ 8.50 em 02/03/2007.
 - O evento “sair 1 cara em 3 jogadas” é dado pelo conjunto: { HTT, THT, TTH}
 - O evento “lâmpada durar menos de 1000 horas” pode ser expresso como: { $x : 0 < x < 1000$ }

monica@ele.puc-rio.br

9

Evento



- Da definição segue diretamente que ambos \emptyset e S são **eventos**.
- Se o **espaço amostral é finito** e possui n elementos, então existem 2^n subconjuntos deste espaço amostral, isto é, existem **2^n eventos**.
- É claro que não podemos dizer quantos eventos existem associados a um espaço amostral infinito.

monica@ele.puc-rio.br

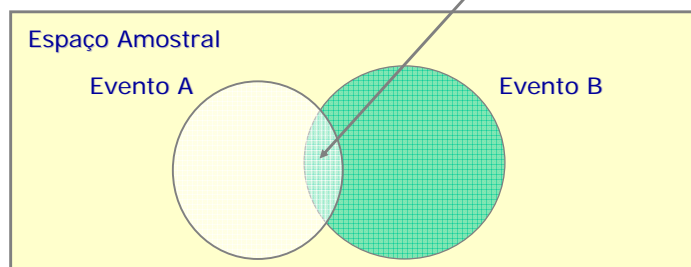
10

Propriedades de Eventos



- Se A e B são eventos – sua **interseção** também é um evento! Isso vale também para a interseção entre n eventos.

Interseção entre os eventos A e B



monica@ele.puc-rio.br

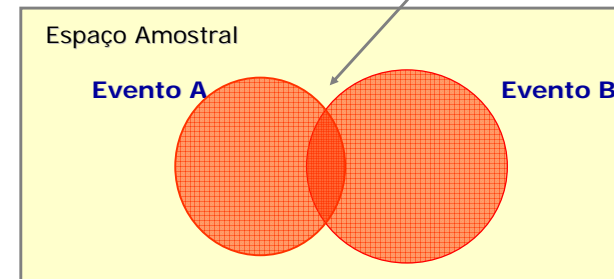
11

Propriedades de Eventos



- Se A e B são eventos – sua **união** também é um evento! Esta propriedade é válida também para a união de n eventos.

união entre os eventos A e B



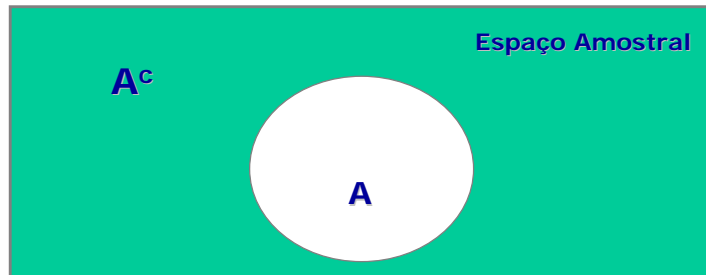
monica@ele.puc-rio.br

12

Propriedades de Eventos



- Se A é um evento, o complemento de A , denotado por A^c ou \bar{A} , também é um evento.



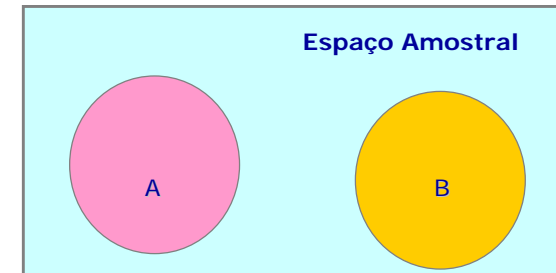
monica@ele.puc-rio.br

13

Eventos mutuamente exclusivos



- Eventos **mutuamente exclusivos** – os elementos de A não pertencem a B e vice-versa, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
 - Note que dois eventos complementares são mutuamente exclusivos



monica@ele.puc-rio.br

14

Definição axiomática de probabilidade



- A definição axiomática de probabilidade encara probabilidade como uma função cujo domínio é o espaço amostral.
- Logo, probabilidade é uma função que “sai” de S e “chega” no intervalo $[0,1]$ e por isso precisamos saber “lidar” com conjuntos, pois **o espaço amostral não é necessariamente numérico**, como já vimos.

monica@ele.puc-rio.br

15

Definição axiomática de probabilidade

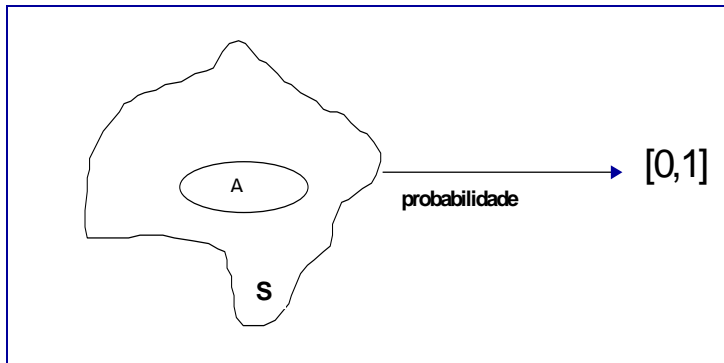


- Seja A um subconjunto qualquer do espaço amostral S .
- Podemos definir uma função $P(\cdot)$ tal que, se $A \subseteq S$, então $P(A)$ é a probabilidade de que o resultado da experiência aleatória seja um elemento de A .
- Esta função $P(\cdot)$ “pega” elementos do espaço amostral e os leva num subconjunto dos reais, o intervalo $[0,1]$.

monica@ele.puc-rio.br

16

Definição axiomática de probabilidade



- No entanto, nem toda função que sai de S e chega em $[0,1]$ pode ser chamada de probabilidade, ela tem que satisfazer certas condições.

Definição axiomática de probabilidade

- Seja S o espaço amostral e A um subconjunto qualquer deste espaço. Uma *função de probabilidade* que atua sobre este espaço amostral satisfaz:
 - i) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq S$
 - ii) $P(S) = 1$
 - iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$
onde os A_i são mutuamente exclusivos.
- Esta última propriedade é válida, em particular, quando existe um número finito de termos na união.

Definição axiomática de probabilidade

- A versão mais simples da expressão iii) será usada muitas vezes neste curso, e por isso a colocamos em destaque:
 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ se A_1 e A_2 forem mutuamente exclusivos.
- Estas três propriedades definem o tipo de função que pode ser chamada de "probabilidade".
- A princípio, existem infinitas funções que mapeiam S em $[0,1]$, mas para ser chamada de "probabilidade", uma função deve satisfazer os três requisitos anteriores.

Propriedades das Probabilidades

- A partir da definição podemos derivar diversas propriedades importantes.
- Seja A um subconjunto qualquer de S e A^c o seu complemento.
- Seja $P(\cdot)$ uma probabilidade definida em S. As seguintes propriedades decorrem da definição de probabilidade:
 - $P(\emptyset) = 0$
 - Para todo $A \subseteq S$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ onde A^c é o complemento de A
 - Para todo $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1 = P(S)$
 - Para quaisquer A_1 e A_2 em S tais que $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$

Propriedades das Probabilidades



- Esta última propriedade resulta numa certa “ordenação” dentro do espaço amostral, e diz simplesmente que, se um evento A_1 está contido noutro, a probabilidade de A_1 é menor ou igual à probabilidade do evento que o contém.
- A propriedade a seguir é uma das mais importantes na prática, e nos permite calcular a **probabilidade da união** de eventos que **não são disjuntos**.

Propriedades das Probabilidades



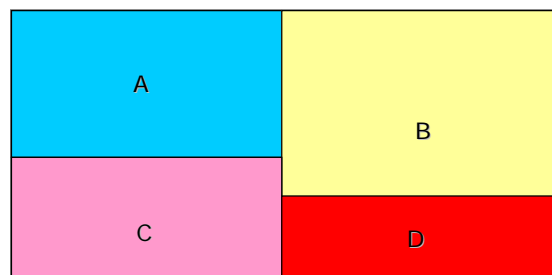
- Para quaisquer A_1 e A_2 em S :
- $\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 \cap A_2)$
- Em particular, se A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos: $\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2)$
- Esta propriedade é às vezes chamada de “**lei da adição**”.

Partição do Espaço Amostral



- É formada por eventos cuja interseção é nula e cuja união é o próprio espaço amostral.
- Por exemplo, pessoas numa pesquisa de mercado classificadas em classes de consumo (A, B, C, D) – as classes formam uma partição do espaço amostral.

Espaço Amostral



Em resumo: casos particulares da lei da adição



- Eventos mutuamente exclusivos
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pois $P(A \cap B) = 0$
- Eventos complementares
 - $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$, já que $P(A \cap A^c) = 0$
- Partição do espaço amostral (com 3 eventos)
 - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$

Exemplo – propriedades das probabilidades



- Um banco possui 10 fundos de investimento. Desses, 6 são de renda fixa, 4 são corporativos e 2 são de renda fixa e corporativos. Se escolhermos um fundo ao acaso, qual é a probabilidade dele ser de renda fixa ou corporativo?
- Solução (evento A: renda fixa, evento B: corporativo)
Universo = 10 elementos
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(A) = 6/10 = 0.6$
 $P(B) = 4/10 = 0.4$
 $P(A \cap B) = 2/10 = 0.2$
 $P(A \cup B) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$ ou 80%

Probabilidade Condicional



- Como será que a probabilidade de um evento muda após sabermos que um outro evento ocorreu? Isso nos leva à idéia de probabilidade condicional.
- A idéia de probabilidade condicional é uma das mais importantes deste curso e está intimamente relacionada ao fato da ocorrência de um evento afetar ou não a probabilidade de ocorrência de outro evento.
- Uma probabilidade condicional nada mais é do que uma **probabilidade calculada** não mais a partir do espaço amostral inteiro S, e sim **a partir de um subconjunto de S**.

Probabilidade Condicional



- Motivação**
- Um grupo de pessoas inclui 40 com diploma de curso superior, 20 microempresários e 10 que são, ao mesmo tempo, portadores de diploma do curso superior e microempresários.
- Calcule a probabilidade de alguém ser microempresário sabendo que ele tem diploma de curso superior.
- Sejam os eventos:
A = { pessoa tem diploma de curso superior }
B = { pessoa é um microempresário }

Seleciona-se uma das 50 pessoas aleatoriamente. Então:

Probabilidade Condicional



- $\Pr(A) = 40/50$, $\Pr(B) = 20/50$ e $\Pr(A \cap B) = 10/50$
- Considere o seguinte evento: a pessoa é microempresária e sabe-se que ela tem diploma de curso superior.
- A probabilidade deste evento deve ser diferente da probabilidade da pessoa ser microempresária, por que agora o espaço amostral não consiste mais nas 50 pessoas originais, mas apenas naquelas que possuem diploma de curso superior.
- A probabilidade condicional de que uma pessoa seja microempresária sabendo-se que ela tem diploma de curso superior é dada por:

Probabilidade Condicional



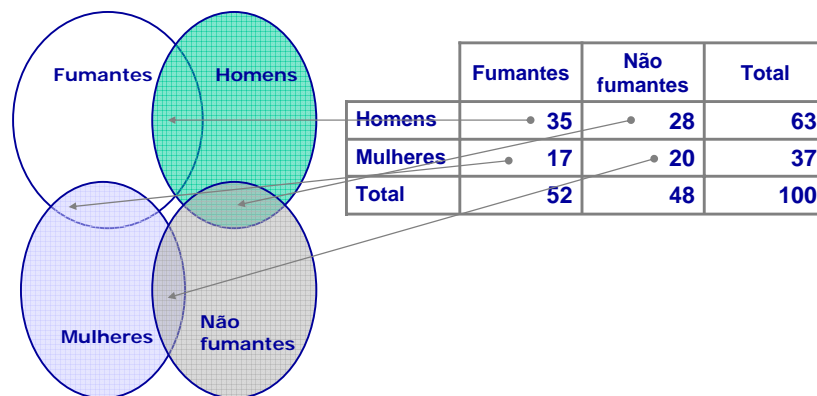
- $P(A \cap B) / Pr(A) = 10 / 40 = 0.25$
- Ou, em outras palavras, devemos olhar para as 10 pessoas na interseção **dentre as 40 pessoas com diploma de curso superior**. O nosso “mundo”, ao calcular a probabilidade condicional, restringe-se às 40 pessoas que têm curso superior, e não mais às 50 pessoas do grupo original.

Probabilidade Condicional



- Exemplo
- Em uma amostra de 100 funcionários de uma empresa:
 - 35 são homens e fumantes,
 - 28 são homens e não fumantes,
 - 17 são mulheres fumantes
 - 20 são mulheres e não fumantes.
 - Qual a probabilidade de um funcionário escolhido ao acaso ser fumante, dado que ele é homem?

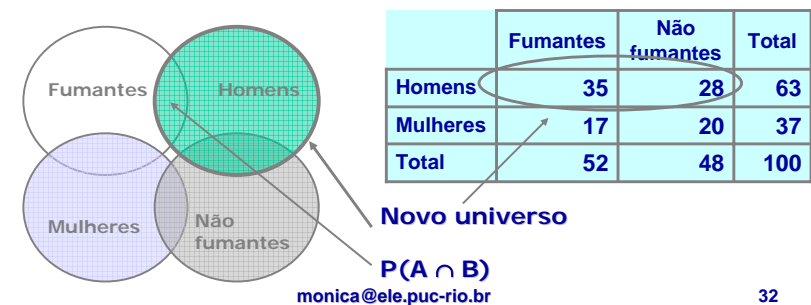
Probabilidade Condicional



Probabilidade Condicional



- Note que, quando definimos que o evento B ocorreu (o funcionário é homem), restringimos o espaço amostral à ocorrência do evento A (o funcionário é fumante)
- O novo universo passa a ser o próprio evento B



Probabilidade Condicional



- ❑ Utilizando o número de elementos de cada conjunto, temos:
 - ❑ $P(A | B) = 35/63 = 0.556$
- ❑ Ou empregando as probabilidades:
 - ❑ $P(B) = 63/100 = 0.63$
 - ❑ $P(A \cap B) = 35/100 = 0.35$
 - ❑ $P(A \cap B)/P(B) = 0.35/0.63 = 0.556$

Probabilidade Condicional



- ❑ Estes exemplos nos fizeram **derivar naturalmente** a **probabilidade condicional** do evento B dado o evento A.
- ❑ Em geral, a probabilidade do evento B dado o evento A (ou dado que o evento A ocorreu) é:
 $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A)$
- ❑ Analogamente: **$P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$**
- ❑ Estas definições só são válidas quando os denominadores forem diferentes de zero.

Probabilidade Condicional



- ❑ Ao reordenarmos as expressões anteriores encontramos:

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = P(A | B) \cdot P(B)$$

- ❑ Este resultado é também conhecido como **Teorema da Multiplicação**. Este teorema nos permite escrever uma probabilidade condicional em termos da probabilidade condicional “inversa”, o que é útil quando uma delas for difícil de calcular. Em particular:

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}$$

Eventos Independentes



- ❑ Dois eventos A e B são chamados de **independentes** se:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$$

- ❑ Do contrário, A e B são eventos *dependentes*.
- ❑ Independência é uma propriedade muito forte e tem um impacto direto sobre as probabilidades condicionais, como veremos a seguir.

Eventos Independentes



- ❑ Não confunda eventos independentes com eventos mutuamente exclusivos!
- ❑ **Dois eventos cujas probabilidades são diferentes de zero não podem ser, ao mesmo tempo, mutuamente exclusivos e independentes. Por que? Se eles são mutuamente exclusivos, se um ocorre, o outro não pode ocorrer, e assim a probabilidade do segundo é zero e então eles são dependentes.**

monica@ele.puc-rio.br

37

Probabilidade Condicional



- ❑ Para eventos independentes,
 $P(A | B) = (P(A) \cdot P(B)) / P(B) = P(A)$
- ❑ Ou seja, se A e B são independentes, a ocorrência de B não traz qualquer informação adicional sobre A.
- ❑ Analogamente, se A e B são independentes: $P(B | A) = P(B)$
- ❑ Em termos bastante informais, se A e B são independentes, um evento não tem “nada a ver” com o outro!

monica@ele.puc-rio.br

38

Independência e Dependência



- ❑ **Exemplo**
- ❑ Tomou-se uma amostra com 1000 pessoas num shopping-center com o objetivo de investigar a relação entre renda familiar e posse de cartões de crédito.
- ❑ A partir dos dados da próxima tabela pergunta-se: existe independência entre “renda” e “posse de cartões de crédito”?

monica@ele.puc-rio.br

39

Independência e Dependência



Renda Familiar → Núm. Cartões ↓	< R\$ 500	R\$ 501 a R\$1000	R\$ 1001 a R\$ 2000	> R\$ 2001	
0	260	170	80	20	530
1	50	100	110	60	320
2 ou mais	20	25	45	60	150
	330	295	235	140	1000

- ❑ Se existe independência entre as duas variáveis, então $\Pr(A_i \cap B_j) = \Pr(A_i) \cdot \Pr(B_j)$ para todos i e j, onde A_i indica o nível de renda e B_j o número de cartões de crédito. **Logo, basta provar que a igualdade acima não é válida para ALGUMA célula na tabela para concluir que as duas variáveis são dependentes. Se olharmos para a célula superior esquerda vemos que:**

monica@ele.puc-rio.br

40

Independência e Dependência



- $\Pr(\text{renda abaixo de R\$ 500 E nenhum cartão}) = 0.26$
- Mas:
 - $\Pr(\text{renda abaixo de R\$ 500}) = 330/1000 = 0.33$
 - $\Pr(0 \text{ cartões de crédito}) = 530/1000 = 0.53$
- E como $0.26 \neq (0.33)(0.53)$, segue que as variáveis “renda familiar” e “número de cartões de crédito” são **dependentes**.

Exemplo



- Uma caixa contém R bolas vermelhas e B bolas azuis. Vamos tirar 2 bolas da caixa sem repô-las. Qual a probabilidade p da primeira bola ser vermelha e da segunda ser azul?
- Solução
Sejam A e B os seguintes eventos:
 - A = {1a. bola é vermelha}
 - B = {2a. bola é azul}
- Se o evento A ocorreu, uma bola vermelha foi tirada da caixa. Como não há reposição, a probabilidade de obter uma bola azul na 2a. retirada é:

Exemplo



$$\Pr(B|A) = \frac{B}{R+B-1}$$

- O evento $(A \cap B)$ é o evento {1a. bola é vermelha e a 2a. bola é azul}, e sua probabilidade é:

$$P(A \cap B) = p = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{R}{R+B} \cdot \frac{B}{R+B-1}$$

Probabilidade Condicional



- Como será que a probabilidade de um evento muda após sabermos que um outro evento ocorreu? Isso nos leva à idéia de probabilidade condicional.
- Uma probabilidade condicional nada mais é do que uma **probabilidade calculada** não mais a partir do espaço amostral inteiro S, e sim **a partir de um subconjunto de S**.
- Já vimos que a definição de prob. condicional é:
 - $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ e, analogamente,
 - $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

Probabilidade Condicional



- Estas duas últimas expressões em conjunto nos levam ao resultado conhecido como **Teorema da Multiplicação**:

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = P(A | B) \cdot P(B)$$

- A partir desta última expressão:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)P(B)}{P(A)}$$

Exemplo



- Numa certa cidade 40% das pessoas são homens e 60% mulheres. Também, 50% dos homens e 30% das mulheres fumam. Ache a probabilidade de que uma pessoa seja homem, dado que esta pessoa é fumante.
- Solução**
 $Pr(H) = 0.4$ = probabilidade de selecionar um homem
 $Pr(M) = 0.6$ = probabilidade de selecionar uma mulher
Seja S o evento: "uma pessoa é fumante". Então:
 $Pr(S | H) = 0.5$ e $Pr(S | M) = 0.3$.
Desejamos encontrar $Pr(H | S)$.

Exemplo



Pela definição de probabilidade condicional:

$$Pr(H | S) = \frac{Pr(H \cap S)}{Pr(S)} = \frac{Pr(S | H)Pr(H)}{Pr(S)}$$

- Mas $Pr(H)$ e $Pr(S | H)$ são conhecidas, e então só é preciso calcular $Pr(S)$ (a probabilidade de um fumante na população). Mas, note que:
- $S = (S \cap M) \cup (S \cap H)$ e os conjuntos $(S \cap M)$ e $(S \cap H)$ são disjuntos
 $Pr(S) = Pr(S \cap M) + Pr(S \cap H) =$
 $= Pr(S | M) \cdot Pr(M) + Pr(S | H) \cdot Pr(H) =$
 $= (0.3)(0.6) + (0.5)(0.4) = 0.38$

Exemplo



Finalmente:

$$Pr(H | S) = \frac{Pr(H \cap S)}{Pr(S)} = \frac{Pr(S | H)Pr(H)}{Pr(S)} = \frac{(0.5)(0.4)}{(0.38)} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19} = 0.5263$$

Independência

- Dois eventos A e B são **independentes** se:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

- Se A e B são independentes, então as probabilidades condicionais são iguais às incondicionais, isto é:

$$\Pr(A | B) = (\Pr(A) \cdot \Pr(B)) / \Pr(B) = \Pr(A)$$

$$\Pr(B | A) = \Pr(B)$$

- Em outras palavras, se A e B são independentes, A “não traz qualquer informação sobre B” (e vice-versa).

Independência para mais de dois eventos

- Considere uma coleção de n eventos A_1, A_2, \dots, A_n . Estes eventos são independentes se, e somente se:

$$\begin{aligned} \text{i) } \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \dots \Pr(A_n) \text{ e,} \end{aligned}$$

- ii) Toda sub-coleção de eventos contendo mais de dois e menos de n eventos é independente.

Independência para mais de dois eventos

- No caso de 3 eventos A, B e C, a independência ocorre se TODAS as condições abaixo são satisfeitas:

$$1) \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

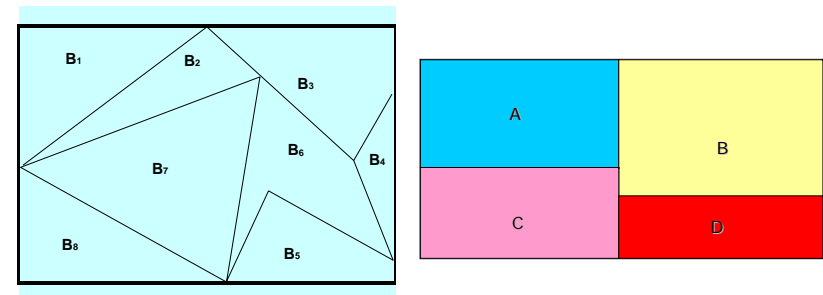
$$2) \Pr(A \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(C)$$

$$3) \Pr(B \cap C) = \Pr(B) \cdot \Pr(C)$$

$$4) \Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C)$$

Partição do Espaço Amostral

- Uma partição do espaço amostral é uma coleção de eventos mutuamente exclusivos cuja união é o próprio S (espaço amostral), como nas figuras a seguir.



Partição do Espaço Amostral



- Em termos formais, os eventos B_1, B_2, \dots, B_k formam uma partição do espaço amostral S se:

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
- $\cup B_i = S$
- $\Pr(B_i) > 0$ para todo i

- Para que serve uma partição?**
- Podemos escrever qualquer evento no espaço amostral em termos das suas interseções com os conjuntos que formam uma partição do espaço amostral.

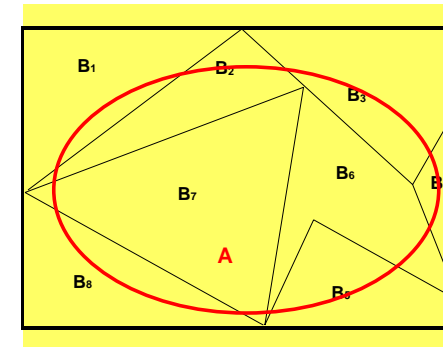
monica@ele.puc-rio.br

53

Partição do Espaço Amostral



- Suponha que A é um evento qualquer em S e B_1, B_2, \dots, B_8 formam uma partição de S , como na figura a seguir.



monica@ele.puc-rio.br

54

Partição do Espaço Amostral



- Então podemos escrever o evento A em termos das suas interseções com cada elemento da partição (neste exemplo, B_1 a B_8).
- $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$
- Mas, os $(A \cap B_i)$ são mutuamente exclusivos, e assim é muito fácil calcular a probabilidade da sua união (basta somar as probabilidades). Logo:
- $\Pr(A) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) + \Pr(A \cap B_3) + \dots + \Pr(A \cap B_k)$
- Mas, cada uma destas probabilidades pode ser escrita em termos de probabilidades condicionais.

monica@ele.puc-rio.br

55

Teorema da Probabilidade Total



- É um resultado que decorre diretamente das propriedades de uma partição, como mostrado nas transparências anteriores.
- Note que:
- $\Pr(A) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) + \Pr(A \cap B_3) + \dots + \Pr(A \cap B_k)$
- Mas:
- $\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i) \cdot \Pr(A | B_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$.
- Combinando estes dois resultados fornece o teorema da probabilidade total.

monica@ele.puc-rio.br

56

Teorema da Probabilidade Total



- Sejam B_1, B_2, \dots, B_k uma partição de S e A um evento qualquer em S . Então:
- $\Pr(A) = \Pr(B_1) \cdot \Pr(A | B_1) + \Pr(B_2) \cdot \Pr(A | B_2) + \dots + \Pr(B_k) \cdot \Pr(A | B_k)$
- O caso mais simples ocorre quando a partição é composta por apenas 2 eventos, B e seu complemento, B^c . Neste caso:
- $\Pr(A) = \Pr(B) \cdot \Pr(A | B) + \Pr(B^c) \cdot \Pr(A | B^c)$

Teorema de Bayes



- É um resultado muito útil em Probabilidade, que “mistura” os teoremas da multiplicação e da probabilidade total.
- Sejam B_1, B_2, \dots, B_k uma partição de S e A um evento qualquer em S . Então:

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^k \Pr(A | B_j) \Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A | B_i) \Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^k \Pr(A | B_j) \Pr(B_j)}$$

- Para qualquer evento B_i na partição e qualquer A .

Teorema de Bayes



- Para que serve?
 - Muitas vezes conseguimos encontrar partições de S que são “óbvias” ou “naturais”;
 - O teorema de Bayes nos permite “inverter” probabilidades condicionais, escrevendo uma probabilidade condicional que (esperamos!) é difícil de calcular diretamente em termos de probabilidades “fáceis” de calcular.

Teorema de Bayes



- Cuidados ao usar o Teorema de Bayes
 - **ESCREVA OS EVENTOS DE INTERESSE.**
 - **NÃO TENHA TENTADO RESOLVER OS PROBLEMAS “DE CABEÇA” PARA MINIMIZAR SUAS CHANCES DE ERRO!**

Exemplo - Bayes



- Os funcionários de uma empresa se dividem em 3 grupos: economistas, engenheiros e analistas de sistemas. Estes funcionários podem ocupar cargos técnicos ou gerenciais. Sabemos que:
 - 40% dos funcionários são economistas,
 - 30% dos funcionários são engenheiros e
 - 30% dos funcionários são analistas de sistemas.
- O percentual de cada grupo ocupando cargos gerenciais é:
 - 30% dos economistas,
 - 40% dos engenheiros,
 - 10% dos analistas de sistemas.

monica@ele.puc-rio.br

61

Exemplo - Bayes



- a) Seleciona-se um funcionário aleatoriamente. Qual a probabilidade dele ocupar um cargo gerencial?
- b) Seleciona-se uma pessoa ao acaso na empresa e sabe-se que ela ocupa um cargo de gerência. Qual a probabilidade dela ter vindo de cada um dos três grupos, ou seja, dado que a pessoa é um gerente, qual a probabilidade dela ser economista, engenheiro ou analista de sistemas?

monica@ele.puc-rio.br

62

Exemplo - Bayes



Solução

a) Considere os eventos:

$A_1 = \{\text{economistas}\}$, $A_2 = \{\text{engenheiros}\}$, $A_3 = \{\text{analistas de sistemas}\}$, $G = \{\text{cargo de gerência}\}$

Sabemos que: $\Pr(A_1) = 0.40$, $\Pr(A_2) = 0.30$, $\Pr(A_3) = 0.30$. Também: $\Pr(G | A_1) = 0.30$, $\Pr(G | A_2) = 0.40$ e $\Pr(G | A_3) = 0.10$.

monica@ele.puc-rio.br

63

Exemplo - Bayes



- Queremos encontrar $\Pr(G)$. Mas:
$$\Pr(G) = \Pr(G \cap A_1) + \Pr(G \cap A_2) + \Pr(G \cap A_3) =$$
$$= \Pr(A_1) \cdot \Pr(G | A_1) + \Pr(A_2) \cdot \Pr(G | A_2) + \Pr(A_3) \cdot \Pr(G | A_3)$$
- A substituição dos valores resulta em:
$$\Pr(G) = (0.40)(0.30) + (0.30)(0.40) + (0.30)(0.10) = (0.30)(0.90) = 27 \%$$

monica@ele.puc-rio.br

64

Exemplo - Bayes



- ❑ Queremos descobrir $\Pr(A_i | G)$ para $i = 1, 2, 3$. Isto é uma aplicação direta do teorema de Bayes, já facilitada por que conhecemos o denominador ($\Pr(G)$).
- ❑ $\Pr(G) = 0.27$ (já calculado)
- ❑ $\Pr(A_1 | G) = \Pr(G | A_1) \cdot \Pr(A_1) / 0.27 = (0.30)(0.40) / 0.27 = 44.4\%$
- ❑ $\Pr(A_2 | G) = \Pr(G | A_2) \cdot \Pr(A_2) / 0.27 = (0.40)(0.30) / 0.27 = 44.4\%$
- ❑ $\Pr(A_3 | G) = \Pr(G | A_3) \cdot \Pr(A_3) / 0.27 = (0.30)(0.10) / 0.27 = 11.2\%$

Exemplo - Bayes



- ❑ Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:
 - 10% dos clientes pertencem à classe A.
 - 21% dos clientes pertencem à classe B.
 - 35% dos clientes pertencem à classe C.
 - 34% dos clientes pertencem à classe D.
- ❑ Dentre os clientes da classe A, 20% usam telefone pré-pago.
- ❑ Dentre os clientes da classe B, 40% usam telefone pré-pago.

Exemplo - Bayes



- ❑ Dentre os clientes da classe C, 90% usam telefone pré-pago.
- ❑ Dentre os clientes da classe D, 98% usam telefone pré-pago.
- ❑ Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes?
- ❑ **Solução**
- ❑ Aqui a partição “natural” da população já existe - os clientes estão divididos em classes de consumo. Se soubermos que alguém usa um telefone pré-pago, como isso afeta a probabilidade da pessoa estar em cada uma das classes de consumo?

Exemplo - Bayes



- ❑ Suponha que A, B, C, D indicam, respectivamente, os eventos “pertencer à classe A”, “pertencer à classe B”, etc...
- ❑ Seja G o evento “usar celular pré-pago”. Então, do enunciado do problema:
- ❑ $P(A) = 0.10$, $P(B) = 0.21$, $P(C) = 0.35$, $P(D) = 0.34$.
- ❑ $P(G|A) = 0.20$, $P(G|B) = 0.40$, $P(G|C) = 0.90$, $P(G|D) = 0.98$.

Exemplo - Bayes



- A probabilidade de um cliente escolhido ao acaso usar celular pré-pago é (pelo Teorema da Probabilidade Total):

$$P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) + P(G|D)P(D) = (0.20)(0.10) + (0.40)(0.21) + (0.90)(0.35) + (0.98)(0.34) = 0.7522$$

- Escolhe-se um cliente ao acaso, e observa-se que ele usa celular pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de consumo?

Exemplo - Bayes



- Agora o Teorema de Bayes entra em ação, mas, como já calculamos o denominador (a probabilidade de alguém ser cliente pré-pago), o cálculo se resume ao Teorema da Multiplicação.

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \frac{(0.10)(0.20)}{0.7522} = 2.66\%$$

$$P(B|G) = \frac{P(G|B)P(B)}{P(G)} = \frac{(0.21)(0.40)}{0.7522} = 11.17\%$$

$$P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G)} = \frac{(0.35)(0.90)}{0.7522} = 41.88\%$$

$$P(D|G) = \frac{P(G|D)P(D)}{P(G)} = \frac{(0.34)(0.98)}{0.7522} = 44.30\%$$

Exemplo - Bayes



- Note que as probabilidades condicionais (dado que o cliente é pré-pago) são diferentes das incondicionais, e então existe DEPENDÊNCIA entre o uso do celular pré-pago e a classe de consumo!
- Por exemplo, a probabilidade de um cliente qualquer ser da classe A é 10%, mas se soubermos que o cliente é um usuário de pré-pago, a probabilidade dele ser de classe A cai para 2.66%.

Exemplo - Bayes



- No outro extremo, a probabilidade de um cliente qualquer ser da classe D é 34%. Dada a informação de que o cliente é “pré-pago”, a probabilidade dele ser “classe D” sobe para 44.3%.

Teorema de Bayes – para casa



- ❑ Uma revenda de carros usados oferece garantia total por 4 meses para todos os carros que vende, e este é o seu grande diferencial de marketing. Uma pesquisa anterior revelou que:
 - 12% dos carros vendidos são Peugeot.
 - 13% dos carros vendidos são Ford.
 - 18% dos carros vendidos são Fiat.
 - 16% dos carros vendidos são GM.
 - 20% dos carros vendidos são Volkswagen.
 - 21% dos carros vendidos são de outros fabricantes.

Teorema de Bayes – para casa



- ❑ Dentre os compradores de Peugeot, 7% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- ❑ Dentre os compradores de Ford, 8% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- ❑ Dentre os compradores de Fiat, 15% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- ❑ Dentre os compradores de GM, 10% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.

Teorema de Bayes – para casa



- ❑ Dentre os compradores de Volkswagen, 16% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- ❑ Dentre os compradores de outras marcas, 18% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- ❑ Um comprador entra na loja com uma reclamação durante o período de vigência da garantia.
- ❑ Qual a probabilidade dele ter comprado um carro de cada uma das marcas (incluindo “outras”)?

Teorema de Bayes – para casa



- ❑ Uma empresa de telefonia quer saber se vale a pena disponibilizar internet de banda larga para seus clientes, e encomendou uma pesquisa de mercado, cujos resultados estão a seguir:
 - 15% dos clientes usam a internet mais de 30 horas por semana.
 - 23% dos clientes usam a internet entre 20 e 30 horas por semana.
 - 28% dos clientes usam a internet entre 10 e 20 horas por semana.
 - 34% dos clientes usam a internet menos de 10 horas por semana.

Teorema de Bayes – para casa



- Dentre os clientes que usam internet mais de 30 horas por semana, 90% estão interessados no acesso rápido (banda larga).
- Dentre os clientes que usam internet entre 20 e 30 horas por semana, 70% estão interessados no acesso rápido (banda larga).
- Dentre os clientes que usam internet entre 10 e 20 horas por semana, 45% estão interessados no acesso rápido (banda larga).

Teorema de Bayes – para casa



- Dentre os clientes que usam internet menos de 10 horas por semana, 25% estão interessados no acesso rápido (banda larga).
- Um cliente é escolhido aleatoriamente e está interessado na internet de banda larga. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de usuário (mais de 30 horas, 20 a 30 horas, etc ...)?

Teorema de Bayes – para casa



- Uma certa forma de câncer ocorre à razão de 3 em 1000 pessoas. Desenvolveu-se um teste para detectar a doença.
- Se um paciente é sadio, existe 5% de chance de um alarme falso.
- Se um paciente tem a doença, existe 2% de chance de que o teste não consiga detectá-la.
- Qual a probabilidade da pessoa ter a doença sabendo que o resultado do teste foi positivo (acusou a existência da doença)?

Teorema de Bayes – para casa



- Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:
 - 10% dos clientes pertencem à classe A.
 - 25% dos clientes pertencem à classe B.
 - 35% dos clientes pertencem à classe C.
 - 30% dos clientes pertencem à classe D.

Teorema de Bayes – para casa



- ❑ Dentre os clientes da classe A, 25% usam telefone pré-pago.
- ❑ Dentre os clientes da classe B, 45% usam telefone pré-pago.
- ❑ Dentre os clientes da classe C, 90% usam telefone pré-pago.
- ❑ Dentre os clientes da classe D, 95% usam telefone pré-pago.

- ❑ Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes?

Estudo de Caso



- ❑ Os dados foram obtidos do 2008 Statistical Abstract of the United States e se referem à não cobertura por seguro saúde, idade e raça/grupo étnico.

- ❑ Os dados estão na planilha 08s0148.xls.

- ❑ Empregando os dados de 2005 (os mais recentes disponíveis):

Estudo de Caso



- ❑ Note que em 2005, o total da população é 293834 (em milhares de pessoas, como os outros valores da tabela).
- ❑ Calcule a probabilidade de alguém não ter seguro.
- ❑ Calcule a probabilidade de alguém não ter seguro em cada uma das faixa etárias.
- ❑ Sabendo que a pessoa está na faixa abaixo de 18 anos, qual a probabilidade dela não ter seguro?

Estudo de Caso



- ❑ Sabendo agora que a pessoa tem entre 35 e 44 anos, qual a probabilidade dela não ter seguro?

- ❑ E se soubermos que o indivíduo está na faixa acima de 65 anos? Qual a probabilidade dele não ter seguro?

- ❑ Como é a distribuição de segurados e não segurados entre homens e mulheres? Sabendo que o indivíduo não é segurado, qual a probabilidade de ser homem? Sabendo que é homem, qual a probabilidade de não ser segurado?