

Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão

Aula 3

Mônica Barros, D.Sc.

Julho de 2007

monica@ele.puc-rio.br

1

Aula 3

- Variáveis Aleatórias Contínuas e Discretas
- Função de Probabilidade
- Função Densidade
- Função de Distribuição
- Momentos de uma variável aleatória Média, Variância e Desvio Padrão

monica@ele.puc-rio.br

2

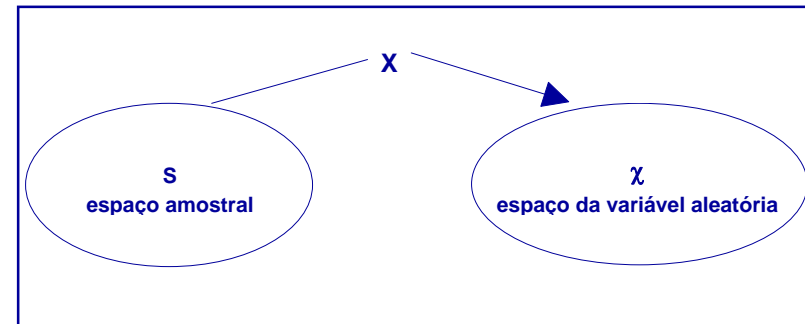
Variáveis Aleatórias

- Muitas vezes o espaço amostral não é um conjunto de valores numéricos. Por exemplo, se jogamos uma moeda 3 vezes, o espaço amostral é $S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT \}$, onde cada resultado tem a mesma probabilidade, e T indica “coroa”, H indica “cara”.
- Seja S o espaço amostral e X uma função que “pega” elementos deste espaço (resultados da experiência) e os leva num subconjunto dos números reais. Esta função X é chamada de **variável aleatória**.
- **Atenção:** usaremos aqui X (maiúscula) para denotar a variável aleatória e x (minúscula) para indicar um valor específico da variável, isto é, um número.

monica@ele.puc-rio.br

3

Variáveis Aleatórias



Seja X uma variável aleatória definida num espaço amostral S e seja \mathcal{X} o espaço de X . Seja A um subconjunto de \mathcal{X} e S um subconjunto de S (espaço amostral).

monica@ele.puc-rio.br

4

Variáveis Aleatórias



- Já definimos a probabilidade de um evento $S \subseteq \mathcal{S}$ (espaço amostral), e agora gostaríamos de estender esta definição e falar da probabilidade de um evento $A \subseteq \mathcal{X}$.
- O nosso objetivo agora é definir probabilidades a partir de valores possíveis da variável aleatória, sem referência explícita aos pontos do espaço amostral que deram origem aqueles valores da variável aleatória.
- **Como definir $\Pr(X \in A)$?**
- A maneira mais natural de fazer isso é associar a probabilidade do evento $X \in A$ à probabilidade do evento S no espaço amostral \mathcal{S} .

monica@ele.puc-rio.br

5

Variável Aleatória Discreta



- **Nota: freqüentemente iremos abreviar “variável aleatória” por v.a.**
- **Variável aleatória discreta** – pode assumir apenas valores num conjunto finito ou contável, por exemplo, número inteiros ou inteiros positivos.
- **Exemplos**
 - Número de espectadores em uma sessão de cinema,
 - Resultado do lançamento de um dado,
 - Número de ligações recebidas por uma central de telemarketing num intervalo de tempo especificado,
 - número de assaltos numa esquina.

monica@ele.puc-rio.br

6

Função de Probabilidade



- É uma função que associa a cada possível valor de uma variável aleatória discreta a sua probabilidade de ocorrência.
- **A função de probabilidade deve satisfazer:**
 - $\Pr(X = x) = f(x) \geq 0$ para todo x
 - $\sum_{\text{todo } x} \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo } x} f(x) = 1$
- Também, a probabilidade de qualquer subconjunto A de valores da v.a. é apenas o somatório de $f(x)$ para os valores da v.a. contidos em A .

monica@ele.puc-rio.br

7

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- Seja X uma variável aleatória discreta com espaço $\mathcal{X} = \{X: x = 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Seja $f(x) = \Pr(X = x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!} \left(\frac{1}{16}\right)$ $x = 0, 1, 2, 3, 4$
- Note que $f(x)$ é uma função de probabilidade, pois:
 - i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$, isto é, $x = 0, 1, 2, 3, 4$
 - Também:
 - ii) $\sum_{\mathcal{X}} f(x) = \sum_{x=0}^4 \frac{4!}{x!(4-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \sum_{x=0}^4 \frac{3}{2} \frac{1}{x!(4-x)!} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!(2)!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right]$
 $= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{8}{12} \right] = \frac{24}{24} = 1$

monica@ele.puc-rio.br

8

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- Seja $A = \{0, 1\}$. Então:
- $\Pr(X \in A) = f(0) + f(1) = \Pr(X=0) + \Pr(X=1) =$
$$= \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

- Veremos depois que este é um caso particular da função de probabilidade Binomial, com parâmetros $n = 4$ e $p = 1/2$.

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- Uma fábrica produz fusíveis. A probabilidade de um fusível produzido ser defeituoso é 10%. Teste-se fusíveis encerrando o teste assim que o primeiro fusível defeituoso é encontrado.
- Seja X o número de testes realizados até encontrar o primeiro fusível defeituoso.
- Ache a função de probabilidade de X .

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- **Solução**
O espaço amostral é constituído por seqüências como:
D
BD
BBD
BBBD
BBBBD
.....
- Onde B indica que o fusível está perfeito, e D indica que o fusível tem defeito.

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- Logo, os valores possíveis de X são: 1, 2, ..., n, (não há um valor máximo).
- Mas, $X = n$ se, e somente se, os $(n-1)$ primeiros fusíveis testados estão OK e o n -ésimo tem defeito. Isto é, $X = n$ corresponde à seqüência: BBBB.....BD, que tem $n-1$ fusíveis OK e 1 com defeito.
- Se o estado de um fusível não afetar a condição do próximo podemos supor que:

$$f(n) = \Pr(X = n) = (0.9)^{n-1} \cdot (0.1) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- Note que $f(n) > 0$ para todo n e também:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^{n-1} \cdot (0.1) = 0.1 \sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^{n-1} = 0.1 \{1 + 0.9 + (0.9)^2 + \dots\} = 0.1 \left\{ \frac{1}{1-0.9} \right\} = 1$$

- Logo, $f(n) = \Pr(X = n)$ assim definida é uma função de probabilidade válida.
- Veremos mais tarde que a variável X que surge neste exemplo é chamada de **v.a. Geométrica**.

Variável Aleatória Discreta - Exemplo



- **Nota:**
- Neste exemplo empregamos a **série geométrica** para demonstrar que o somatório das probabilidades para todos os valores de X era um.
- A série geométrica é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1$$

- Alternativamente, se começarmos a série em $k=1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a^k &= a + a^2 + a^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k - 1 = \\ &= \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a} \text{ desde que } |a| < 1 \end{aligned}$$

Variável Aleatória Contínua



- **Se uma variável puder assumir qualquer valor num intervalo real, é uma variável aleatória contínua.**
- **Exemplos**
 - Tempo de atendimento em um caixa de banco,
 - Peso real de um pacote de 1 Kg de açúcar,
 - Custo de construção de uma fábrica,
 - Custo de lançamento de uma campanha publicitária,
 - Altura dos homens brasileiros com idades entre 18 e 30 anos,
 - Retorno diário de uma ação,
 - Proporção de eleitores a favor da reeleição do prefeito.

Variável Aleatória Contínua



- Como já foi dito, variáveis aleatórias contínuas são aquelas que podem assumir quaisquer valores dentro de um intervalo.
- **Para variáveis aleatórias discretas, nós podíamos atribuir uma probabilidade a um determinado valor da variável.**
- Para variáveis aleatórias contínuas a situação é bem diferente. Como uma variável contínua pode assumir qualquer valor em um intervalo, na realidade ela pode assumir infinitos valores.

Variável Aleatória Contínua



- Portanto, **não podemos falar da probabilidade de ocorrência de um valor em particular**. Ao invés disso, devemos pensar na probabilidade de ocorrência associada a um intervalo.
- Na discussão anterior sobre distribuições discretas de probabilidades introduzimos o conceito de função de probabilidade ($f(x)$).
- **No caso contínuo, utilizaremos a função densidade de probabilidade, também representada por $f(x)$.**

monica@ele.puc-rio.br

17

Variável Aleatória Contínua



- Nesse caso, a função densidade de probabilidade fornece um valor para cada possível valor (infinitos) da variável X .
- No entanto, os valores de $f(x)$ não representam as probabilidades associadas a x .
- **Ao invés disso, a área (isto é, a integral!) sob a função de densidade de probabilidade em um determinado intervalo fornece a probabilidade de ocorrência de um valor dentro desse intervalo.**

monica@ele.puc-rio.br

18

Função Densidade de Probabilidade



- É uma função que satisfaz:

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

- **Da definição de densidade, segue que, para uma v.a. contínua, a probabilidade de um único ponto é zero, isto é: $P(X = a) = 0$ para qualquer número a .**

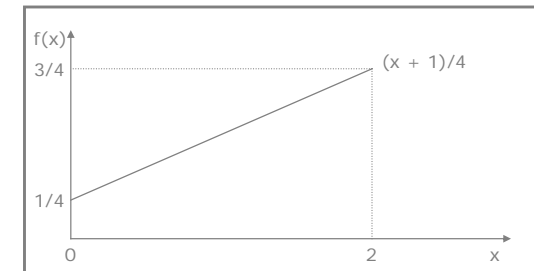
monica@ele.puc-rio.br

19

Distribuições contínuas de probabilidade - exemplo



- Considere a seguinte função de densidade de probabilidade: $f(x) = (x + 1)/4$ para $0 \leq x \leq 2$.
- Verifique se esta é uma função de densidade de probabilidade válida para o intervalo considerado.
- Calcule a probabilidade de $X \geq 1$



monica@ele.puc-rio.br

20

Distribuições contínuas de probabilidade - exemplo



□ Solução

a) Para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade válida, devemos ter a sua área = 1 no domínio da função.

- Neste caso, devemos calcular a área sob a função no intervalo de 0 a 2.
- A área dessa região é dada por:

$$\text{Área} = \frac{f(2) + f(0)}{2} (2 - 0) = \frac{3/4 + 1/4}{2} 2 = 1$$

- Logo, $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida, pois sua integral é 1 no seu domínio de definição e $f(x)$ é sempre maior ou igual a zero.

Distribuições contínuas de probabilidade - exemplo



□ Solução

(b) A probabilidade para um determinado intervalo de x é dada pela área sob a função de densidade de probabilidade nesse intervalo.

$P(X \geq 1)$ corresponde à área sob a função para $1 \leq x \leq 2$

$$\text{Área} = \frac{f(2) + f(1)}{2} (2 - 1) = \left(\frac{3/4 + 2/4}{2} \right) (1) = 0.625$$

Distribuições contínuas de probabilidade - exemplo



□ Exemplo

- Seja X uma variável aleatória contínua com espaço $\aleph = \{x: 0 < x < 1\}$. Seja $f(x) = cx^2$ para todo $x \in \aleph$, onde c é uma constante a determinar. Qual o valor de c ?

□ Solução

$$\int_0^1 cx^2 dx = \frac{cx^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \Leftrightarrow c = 3$$

Logo $c = 3$ é a constante necessária para fazer de $f(x)$ uma densidade em \aleph , isto é, para fazer com que a densidade integre a um no intervalo $(0,1)$.

Função de Distribuição



- Para cada valor x_0 da variável aleatória, a Função de Distribuição (ou Função de Distribuição Acumulada, ou Função de Distribuição Cumulativa) é a **probabilidade de estar naquele valor, ou abaixo dele**, isto é:
- $F(x_0) = \Pr(X \leq x_0)$ para todo x_0

Note que, como $F(x_0)$ é uma probabilidade, ela está limitada ao intervalo $(0,1)$.

- Um ponto importante aqui é: a definição de Função de Distribuição é a mesma para variáveis contínuas ou discretas.

Função de Distribuição



- Algumas funções de distribuição são tabeladas, por exemplo, a da distribuição Normal (0,1).
- O Excel normalmente fornece a opção de calcular a função de probabilidade (ou a densidade) ou a função de distribuição acumulada, através de um argumento lógico nas suas diversas funções estatísticas – por exemplo, vide o “help” da função dist.binom.

Função de Distribuição



- Propriedades da Função de Distribuição
 - i) $0 \leq F(x) \leq 1$ pois $0 \leq \Pr(X \leq x) \leq 1$
 - ii) $F(x)$ é uma função não decrescente

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Função de Distribuição



- Propriedades da Função de Distribuição
 - v) Se X é uma **variável aleatória contínua**, sua **função de distribuição é contínua**.

Se X é **discreta**, $F(x)$ é uma função contínua à direita, isto é, a **função de distribuição apresenta "pulos"** (descontinuidades) que só são "sentidos" quando nos aproximamos do ponto onde existe o "pulo" pela esquerda.

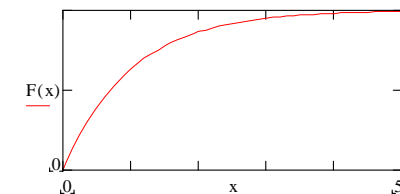
Função de Distribuição - Exemplo



- Seja X uma variável aleatória com função de distribuição definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- O gráfico desta função de distribuição é mostrado a seguir.



Função de Distribuição – Exemplo 2



- Considere uma variável discreta com a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{4!}{x!(4-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{para } x = 0,1,2,3,4$$

- A função de distribuição é:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{4!}{k!(4-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \sum_{k=0}^x \binom{4}{k} \frac{1}{2^4}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right) \sum_{k=0}^x \frac{1}{x!(4-x)!} \quad \text{para } x = 0,1,2,3,4$$

Função de Distribuição – Exemplo 2



- Assim:
- $F(0) = 1/16 = 0.0625 = \Pr(X \leq 0) = \Pr(X = 0)$
- $F(1) = 5/16 = 0.3125 = \Pr(X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1)$
- $F(2) = 11/16 = 0.6875 = \Pr(X \leq 2) = \Pr(X=0) + \Pr(X=1) + \Pr(X=2)$
- $F(3) = 15/16 = 0.9375$
- $F(4) = 1$
- Também $F(x) = 0$ se $x < 0$ e $F(x) = 1$ se $x > 4$

Relação entre a densidade e a função de distribuição



- Seja X uma v.a. contínua com densidade $f(x)$ e função de distribuição acumulada $F(x)$. Então:

$$\Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

- Mas:

$$F(a) = \Pr(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{e}$$

$$F(b) = \Pr(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Relação entre a densidade e a função de distribuição



- Então:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Logo, a densidade é a derivada da função de distribuição.

Esperança matemática



- **Definição (média ou valor esperado)**
- A **média** (ou **valor esperado** ou **primeiro momento**) de uma variável aleatória é definida como:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} x \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

- A média de uma variável aleatória é uma medida de tendência central da distribuição de probabilidade desta variável aleatória.

Esperança matemática



- **Exemplo**
- Seja X uma variável contínua com densidade: $f(x) = cx^2$ para $0 < x < 1$
- 1) Ache a constante c que faz de $f(x)$ uma densidade.
- 2) Encontre a média desta densidade.

Esperança Matemática



- **Solução**
- 1) Para que $f(x)$ seja uma densidade:

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow c \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \Leftrightarrow c = 3$$

- 2) A média desta densidade é:

$$\int_0^1 x(3x^2) dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

Esperança matemática



- **Definição (Variância)**
- A **variância** de uma variável aleatória mede a dispersão da distribuição de probabilidade, e é definida como:

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Esperança matemática



- Onde novamente $f(x)$ representa a densidade de probabilidade (se X contínua) ou a função de probabilidade (se X é discreta) e μ é a média da variável aleatória.
- A variância é o segundo momento em torno da média, e corresponde ao momento de inércia em Mecânica.

Da própria definição segue que **a variância é uma quantidade sempre maior ou igual a zero.**

Esperança matemática



- **Definição (desvio padrão)**
- O **desvio padrão** de uma variável aleatória é a **raiz quadrada positiva da sua variância**, e denotado por σ , isto é:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

- O **desvio padrão** é expresso nas **mesmas unidades que a variável aleatória**, e a variância é dada nas unidades da variável aleatória ao quadrado.

Esperança matemática



- Se o **desvio padrão** é **pequeno** existe **pouca dispersão em torno da média**. Se ele é **grande**, os **valores da variável aleatória** estão **muito dispersos** em torno da média.
- A **média** e a **variância** são casos particulares dos momentos de uma distribuição de probabilidade.

Esperança matemática



- Os momentos de uma distribuição servem para caracterizar esta distribuição, não apenas no que se refere à sua centralidade e dispersão, mas também com relação a outras características, como a simetria ou assimetria da densidade de probabilidade.
- A notação $E(\dots)$ indica o **valor esperado** (ou “esperança”, ou “expectância”), e pode ser estendida para funções mais gerais que X^k ou $(X - \mu)^k$.

Esperança matemática



- Definição (valor esperado de uma função de uma variável aleatória)
- Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x)$ e seja $u(X)$ uma função qualquer tal que as integrais ou somatórios mostrados a seguir existem.
- O valor esperado (ou esperança matemática) de $u(X)$ é:

$$E(u(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x) dx & \text{se } X \text{ é v.a. contínua} \\ \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot f(x) = \sum_{\text{todo } x} u(x) \cdot \Pr(X = x) & \text{se } X \text{ é v.a. discreta} \end{cases}$$

Esperança matemática



- Note que $u(X)$ é também uma v.a.!
- A definição anterior inclui, como casos particulares, as definições de média e variância.
- O próximo teorema é útil na manipulação de combinações lineares de v.a. (ou suas funções).

Esperança matemática



- Teorema (Linearidade do valor esperado)
- Sejam a e b constantes e u , v funções quaisquer de X com valores esperados finitos. Então:

$$E[a \cdot u(X) + b \cdot v(X)] = a E[u(X)] + b E[v(X)]$$

Esperança matemática



- A demonstração deste fato segue diretamente da linearidade das integrais ou somatórios. Em particular, se a é uma constante, $E(a) = a$.
- Nota: fórmula alternativa para o cálculo da variância
- O cálculo da variância através da definição é, às vezes, bastante trabalhoso. Por exemplo, no caso de uma v.a. discreta, é necessário computar todas as diferenças $x_i - \mu$, elevá-las ao quadrado e multiplicá-las pela probabilidade de ocorrência de cada x_i .
- Logo, seria interessante encontrar uma fórmula alternativa (e mais fácil) para o cálculo da variância, e isso pode ser feito empregando-se a linearidade do valor esperado.

Esperança matemática



❑ Fórmula Alternativa para o Cálculo da Variância

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E [(X - \mu)^2] = E [X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

- ❑ Pela linearidade do valor esperado e notando que μ é uma constante:

$$\sigma^2 = E (X^2) - 2\mu.E(X) + E (\mu^2)$$

- ❑ Mas, por definição: $\mu = E (X)$ e μ é uma constante, daí $E (\mu^2) = \mu^2$.

Esperança matemática



❑ Logo:

$$\sigma^2 = E (X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E (X^2) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = E (X^2) - \{E(X)\}^2$$

- ❑ Esta fórmula é válida para qualquer variável aleatória X (contínua ou discreta), desde que a média de X seja finita.

Esperança matemática



❑ Propriedades do valor esperado e da variância de funções lineares

- ❑ Sejam a e b constantes, e X uma variável aleatória qualquer. Então:

1) $E(a.X + b) = a.E(X) + b$

2) $E(a) = a$

3) $\text{VAR}(a.X + b) = a^2.\text{VAR}(X)$

4) $\text{VAR}(a) = 0$

Esperança matemática



❑ Exemplo

- ❑ O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada a seguir:

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
$\text{Pr}(R = r)$	0.40	0.15	0.25	0.15	0.05

- ❑ Calcule o retorno esperado (em %) do investimento e sua variância e desvio padrão.

❑ Solução

- ❑ A variável R é discreta, e sua média é (pela definição):

Esperança matemática



- $\mu = (-5)(0.40) + (0).(0.15) + (5).(0.25) + (10).(0.15) + (15).(0.05) = 1.5$
- A variância de R é:
- $\sigma^2 = (-5-1.5)^2.(0.40) + (0-1.5)^2.(0.15) + (5-1.5)^2.(0.25) + (10-1.5)^2.(0.15) + (15-1.5)^2.(0.05) = 40.25$
- O desvio padrão de R é:
- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 6.344$ (em porcentagem, que é a unidade em que estão expressos os retornos)

Esperança matemática – exemplo (para casa)



- Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = c.x$ onde $0 < x < 3$.
- Ache a constante c que faz de $f(x)$ uma densidade.
 - Encontre a função de distribuição de X.
 - Ache a média, a variância e o desvio padrão de X.
 - Encontre um ponto m no intervalo $(0,3)$ tal que $\Pr(X \geq m) = \Pr(X \leq m) = 50\%$. Este ponto é a mediana da distribuição.

Esperança matemática – exemplo (para casa)



- A renda de uma pessoa numa população é uma variável aleatória contínua X com densidade $f(x) = k/x^3$ onde $x > 1$.
 - a) Ache a constante k que faz desta expressão uma densidade.
 - b) Encontre a renda média nesta população.
 - c) Encontre a renda mediana nesta população, onde m, a mediana, é tal que $\Pr(X > m) = \Pr(X \leq m) = 0.50$.