Módulo básico - Tópicos de Estatística e Probabilidade

ONS – 2006/2007 - Profa. Mônica Barros

LISTA DE EXERCÍCIOS # 1

PROBLEMA 1

Uma empresa de TV a cabo toma uma amostra de 1000 clientes, com o objetivo de verificar a relação entre a renda familiar e o "pacote" escolhido. Atualmente a empresa possui 4 "pacotes" de serviços: básico, completo, premium e super-premium.

Pacote escolhido → Renda Familiar ↓	Básico	Completo	Premium	Super Premium
até 10 S.M.	180	60	30	20
10 a 20 S.M.	80	40	40	40
20 a 30 S.M.	60	30	60	70
mais de 30 S.M.	40	20	70	160

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a pessoa tenha renda em cada uma das 4 categorias.

b) Qual a probabilidade de uma pessoa assinar o pacote básico? E o completo? E o premium? E o super-premium?

c) Dado que a pessoa tem renda entre 10 e 20 S.M., qual a probabilidade de que ela assine o pacote premium?

d) Dado que uma pessoa assina o pacote super-premium, qual a probabilidade da sua renda familiar estar acima de 30 S.M.?

e) Existe independência entre faixa de renda e o tipo de "pacote" adquirido? Por que (explique claramente ou dê um exemplo)?

Solução

a) Sejam R_1 = {renda até 10 S.M}, R_2 = {renda entre 10 e 20 S.M}, R_3 = {renda entre 20 e 30 S.M} e R_4 = {renda acima de 30 S.M}.
$Pr(R_1) = (180+60+30+20)/1000 = 290/1000 = 0.29$
$Pr(R_2) = 0.20$; $Pr(R_3) = 0.22$; $Pr(R_4) = 0.29$

b) Sejam C_1 = {pacote básico}, C_2 = {pacote completo}, C_3 = {pacote premium}, C_4 = {pacote super premium}. Então: $Pr(C_1) = 360/1000 = 0.36$, $Pr(C_2) = 0.15$, $Pr(C_3) = 0.20$ e $Pr(C_4) = 0.29$.

c) Agora vamos restringir a amostra apenas aos assinantes com renda entre 10 e 20 S.M, isto é, 200 assinantes. Pr(premium | renda entre 10 e 20 S.M.) = 40/200 = 0.20

d) Agora só olhamos para os assinantes do pacote super premium.
Pr(renda acima de 30 S.M | pacote super premium) = 160/290 = 0.5517

e) Não existe independência entre faixa de renda e o tipo de "pacote" adquirido. Para comprovar isso, basta mostrar que $Pr(R_i \cap C_j) \neq Pr(R_i).Pr(C_j)$ para algum par i, j. Por exemplo, no caso i = j = 1: Pr(renda abaixo de 10 S.M e pacote básico) = 180/1000 = 0.18 ≠ Pr(renda abaixo de 10 S.M).Pr(pacote básico) = (0.29)(0.36) = 0.1044

PROBLEMA 2

A probabilidade de uma pessoa entrar numa loja e comprar um certo produto é uma variável aleatória **contínua** X com densidade $f(x) = k.x^2.(1-x)$, onde $0 < x < 1$.

a) Encontre a constante k que faz desta expressão uma densidade.

b) Calcule a função de distribuição de X.

Solução

$$a)\int_0^1 k.x^2(1-x)dx = \int_0^1 k\left(x^2 - x^3\right)dx = k\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right\} = k\left\{\frac{1}{12}\right\} = 1 \Rightarrow k = 12$$

b) $$F(x) = \Pr(X \le x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 0 \\ 1 \quad \text{se } x > 1 \\ \int_0^x 12\left(u^2 - u^3\right)du = 12\left\{\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right\} = 4x^3 - 3x^4 = x^3(4-3x) \text{ se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Uma caixa contém 6 bolas brancas e 12 bolas azuis.

Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por **uma** bola da cor oposta.

a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

b) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por **duas** bolas da cor oposta.

c) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

d) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja azul?

Solução

Sejam:

A_1 = 1^a. bola selecionada é azul
A_2 = 2^a. bola selecionada é azul

B_1 = 1ª. bola selecionada é branca (é o complemento de A_1)
B_2 = 2ª. bola selecionada é branca (é o complemento de A_2)

a) Então $Pr(A_1) = 12/18$ e $Pr(B_1) = 6/18$
Se "saiu" uma bola branca na 1ª. retirada, a caixa ficou com 5 bolas brancas e 13 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid B_1) = 5/18$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 1- 5/18 = 13/18$
Se "saiu" uma bola azul na 1ª. retirada, a caixa ficou com 7 bolas brancas e 11 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid A_1) = 7/18$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 11/18$

$$\mathbf{Pr(B_2) = Pr(B_2 \cap B_1) + Pr(B_2 \cap A_1) = Pr(B_2 \mid B_1).Pr(B_1) + Pr(B_2 \mid A_1).Pr(A_1) =}$$
$$\mathbf{= (5/18)(6/18) + (7/18)(12/18) = 114/324 = 0.3519}$$

b) $\mathbf{Pr(A_2) = 1 - Pr(B_2) = 1 - 0.3519 = 0.6481}$

c) Neste caso, $Pr(A_1) = 12/18$ e $Pr(B_1) = 6/18$ mas
Se "saiu" uma bola branca na 1ª. retirada, a caixa ficou com 5 bolas brancas e 14 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid B_1) = 5/19$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 14/19$
Se "saiu" uma bola azul na 1ª. retirada, a caixa ficou com 8 bolas brancas e 11 azuis.
Logo:
$Pr(B_2 \mid A_1) = 8/19$ e $Pr(A_2 \mid B_1) = 11/19$

$$\mathbf{Pr(B_2) = Pr(B_2 \cap B_1) + Pr(B_2 \cap A_1) = Pr(B_2 \mid B_1).Pr(B_1) + Pr(B_2 \mid A_1).Pr(A_1) =}$$
$$\mathbf{= (5/19)(6/18) + (8/19)(12/18) = 126/342 = 0.3684}$$

d) $\mathbf{Pr(A_2) = 1 - Pr(B_2) = 1 - 0.3684 = 0.6316}$

PROBLEMA 4

Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:

10 % dos clientes pertencem à classe A.
25% dos clientes pertencem à classe B.
35% dos clientes pertencem à classe C.
30% dos clientes pertencem à classe D.

Dentre os clientes da classe A, 30% usam telefone pré-pago.
Dentre os clientes da classe B, 40% usam telefone pré-pago.
Dentre os clientes da classe C, 70% usam telefone pré-pago.
Dentre os clientes da classe D, 95% usam telefone pré-pago.

Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes? (ESCREVA CLARAMENTE OS EVENTOS DE INTERESSE NESTE PROBLEMA)

Solução

Pr(A) = 0.10, Pr(B) = 0.25, Pr(C) = 0.35, Pr(D) = 0.30.

Seja R o evento {utilizar serviço pré-pago}.
Então: Pr(R | A) = 0.30, Pr(R | B) = 0.40 , Pr(R | C) = 0.70, Pr(R | D) = 0.95

A probabilidade de um cliente qualquer utilizar roaming é:

$$\Pr(R) = \Pr(R\,|\,A)\Pr(A) + \Pr(R\,|\,B)\Pr(B) + \Pr(R\,|\,C)\Pr(C) + \Pr(R\,|\,D)\Pr(D) =$$
$$= (0.10)(0.30) + (0.25)(0.20) + (0.35)(0.10) + (0.30)(0.02) = 0.1210$$

Sabendo que um cliente utiliza roaming, a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de consumo é:

$$\Pr(A\,|\,R) = \frac{\Pr(R\,|\,A)\Pr(A)}{\Pr(R)} = \frac{0.0300}{0.1210} = 0.2479$$

$$\Pr(B\,|\,R) = \frac{\Pr(R\,|\,B)\Pr(B)}{\Pr(R)} = \frac{0.0500}{0.1210} = 0.4132$$

$$\Pr(C\,|\,R) = \frac{\Pr(R\,|\,C)\Pr(C)}{\Pr(R)} = \frac{0.0350}{0.1210} = 0.2893$$

$$\Pr(D\,|\,R) = \frac{\Pr(R\,|\,D)\Pr(D)}{\Pr(R)} = \frac{0.0060}{0.1210} = 0.0496$$

PROBLEMA 5

O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada a seguir:

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
Pr(R = r)	0.35	0.15	0.20	0.20	0.10

Considere agora a variável aleatória X, onde X = 0 se houve retorno negativo ou zero, e X =1 ("sucesso") se houve retorno positivo. Suponha que você aplica o seu dinheiro por 12 meses consecutivos, e que as aplicações em meses subseqüentes são independentes e com a mesma probabilidade de "sucesso". Qual a probabilidade de obter retorno positivo em 9 ou mais meses?

Solução

a) O retorno médio mensal, em percentual, é:

E(R) = (-5)(0.35) + 0(0.15) + (5)(0.20) + (10)(0.20) + 15(0.10) = 2.75%

b) X é uma variável Binomial com parâmetros n = 12 e p = 0.50, pois a probabilidade de um retorno positivo num dado mês é 0.5 da tabela acima.

Queremos encontrar $Pr(X \geq 9) = Pr(X = 9) + ... + Pr(X = 12)$.

x	Pr(X = x)
9	5.37%
10	1.61%
11	0.29%
12	0.02%
soma	***7.30%***

Logo, $Pr(X \geq 9) = 7.30\%$.

PROBLEMA 6

A probabilidade de uma pessoa ser fumante na população é 8%. Você é fumante e quer acender seu cigarro mas perdeu seu isqueiro. Suponha que os eventos {ter isqueiro} e {ser fumante} são equivalentes. Você sai perguntando a cada pessoa numa enorme fila se elas têm isqueiro.

a) Qual a probabilidade de precisar perguntar a pelo menos cinco pessoas antes de encontrar um fumante?

Solução

Seja X o número de pessoas a quem você tem que perguntar até encontrar um fumante.

Você que encontrar $Pr(X \geq 5)$.

Mas, X é uma variável Geométrica com parâmetro p = 0.08.

Então:

$Pr(X = x) = (0.92)^{x-1}.(0.08)$ para x = 1, 2, 3, ...

$Pr(X \geq 5) = 1 - Pr(X = 1) - Pr(X = 2) - Pr(X = 3) - Pr(X = 4)$

x	Pr(X = x)
1	8.00%
2	7.36%
3	6.77%
4	6.23%
soma	***28.36%***

Pr(X >= 5) = 71.64%

PROBLEMA 7

Um terrorista quer envenenar as pessoas numa festa. Nela, são servidas 60 refeições individuais, das quais 6 estão envenenadas. Qual a probabilidade de, numa mesa de 8 convidados, pelo menos uma pessoa ser envenenada?

Solução

Seja X o número de pessoas envenenadas nesta mesa. Então:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{54}{8-x}}{\binom{60}{8}}$$

Queremos encontrar a probabilidade de pelo menos uma pessoa envenenada, isto é,
Pr(X=1) + Pr(X=2) +...+ Pr(X=8) = 1 – Pr(X = 0)

Mas,

$$\Pr(X = 0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = \frac{\binom{54}{8}}{\binom{60}{8}} = 0.4067$$

E a probabilidade desejada é: 1- 0.4067 = 0.5933

PROBLEMA 8

O salário (em milhares de reais) dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$$f(x) = \frac{c}{x^2} \quad \text{se} \quad 2 \le X \le 8$$

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.
b) Encontre a função de distribuição de X para qualquer número real x.
c) Ache o ponto m entre 2 e 8 tal que Pr(X ≤ m) = 0.50. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa.

Solução

a) $\int_2^8 \frac{c}{x^2}dx = 1 \Leftrightarrow c\left\{\frac{-1}{x}\right\}\Big|_2^8 = c\left\{\frac{-1}{8} + \frac{1}{2}\right\} = c\left(\frac{3}{8}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{3}$

b) F(x) = 0 se x ≤ 2 e F(x) = 1 se x ≥ 8.

$$F(x) = \int_2^x \frac{8}{3t^2}dt = \frac{8}{3}\left\{\frac{-1}{t}\right\}\Big|_2^x = \frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right\} \quad \text{se} \quad 2 < x < 8$$

c) Para achar m é preciso resolver:

$$\frac{8}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right\}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{m}=\frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16} \Leftrightarrow m=16/5=3.2$$

PROBLEMA 9

Você está procurando emprego e está enviando seu CV. Apenas 10% dos CVs enviados resultam numa entrevista. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a primeira entrevista ocorrerá no envio do 10º. CV.
b) Você manda exatamente 15 CVs, qual a probabilidade de ser chamado para 2 entrevistas?
c) Você manda exatamente 30 CVs. Qual a probabilidade de ser chamado para menos de 2 entrevistas?

Solução

Seja p a probabilidade de um curriculum enviado resultar numa chamada para entrevista. Então p =0.10.

a) Neste caso queremos encontrar a probabilidade de 9 falhas seguidas de um sucesso, que é:

$$(0.9)^9(0.1)=0.0387$$

b) Neste caso o número de repetições (número de CVs enviados) é fixo, ou seja, temos uma distribuição Binomial com n = 15 e probabilidade de sucesso (ser chamado para entrevista) igual a 0.1. A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X=2)=\binom{15}{2}(0.1)^2(0.9)^{13}=0.2669$$

c) Neste caso n = 30 e desejamos encontrar:

$$\Pr(X<2)=\Pr(X=0)+\Pr(X=1)=\binom{30}{0}(0.1)^0(0.9)^{30}+\binom{30}{1}(0.1)^1(0.9)^{29}=$$

$$=0.0424+0.1413=0.1837$$

PROBLEMA 10

A Embratur realiza diversas pesquisas sobre a demanda turística no Brasil. Em 2002 observou-se que:

- 36.4% dos turistas estrangeiros residem na Europa;
- 38.6% residem na América do Sul;
- 19.9% residem na América do Norte;
- 2.1% residem na Ásia;

- 3% residem em outras regiões.

Dentre os residentes na Europa, 40% viajam ao Brasil a negócios;

Dentre os residentes na América do Sul, 35% viajam a negócios;

Dentre os residentes na América do Norte, 45% viajam a negócios;

Dentre os residentes na Ásia, 70% viajam a negócios;

Dentre os residentes de outras partes do planeta, 60% viajam a negócios.

Entrevista-se um turista estrangeiro aleatoriamente e ele está no Brasil a negócios. Qual a probabilidade dele ser proveniente de cada uma das regiões indicadas?

Solução

Sejam:
A_1 = Europa
A_2 = América do Sul
A_3 = América do Norte
A_4 = Ásia
A_5 = outros

$Pr(A_1) = 36.4\%$, $Pr(A_2) = 38.6\%$, $Pr(A_3) = 19.9\%$, $Pr(A_4) = 2.1\%$, $Pr(A_5) = 3\%$

N = viagem de negócios

$$\Pr(N) = \Pr(N|A_1)\Pr(A_1) + \Pr(N|A_2)\Pr(A_2) + \Pr(N|A_3)\Pr(A_3) + \Pr(N|A_4)\Pr(A_4) + \Pr(N|A_5)\Pr(A_5)$$

$$\Pr(N) = \frac{40(36.4) + 35(38.6) + 45(19.9) + 70(2.1) + 60(3)}{100(100)} = \frac{4029.5}{10000} = 0.40295$$

$$\Pr(A_1 | N) = \frac{1456}{4029.5} = 0.3613 \qquad \Pr(A_4 | N) = \frac{147}{4029.5} = 0.0365$$

$$\Pr(A_2 | N) = \frac{1351}{4029.5} = 0.3353 \qquad \Pr(A_5 | N) = \frac{180}{4029.5} = 0.0447$$

$$\Pr(A_3 | N) = \frac{895.5}{4029.5} = 0.2222$$

PROBLEMA 11

O tempo entre as chegadas de táxi num cruzamento é uma variável Exponencial com λ = 1/10 chegadas por minutos. Calcule:
a) A probabilidade de alguém ter que esperar mais de 60 minutos por um táxi.
b) A probabilidade de um táxi demorar menos de 10 minutos para passar.

Solução

Seja T o tempo entre chegadas de um táxi, isto é, o tempo que você terá que esperar por um táxi nesta esquina. T é uma variável Exponencial com $\lambda = 1/10$. Sabemos que, para uma variável Exponencial, a função de distribuição é $F(t) = Pr(T \leq t) = 1 - \exp(-\lambda.t)$ e também $Pr(T > t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda.t)$. Logo:

a) $Pr(T > 60) = \exp(-60/10) = \exp(-6) = 0.0025$
b) $Pr(T < 10) = 1 - \exp(-10/10) = 1 - \exp(-1) = 0.6321$

PROBLEMA 12

A distância entre buracos numa estrada é uma variável Exponencial com $\lambda = 1/5$ buracos por km. Qual a probabilidade de não existirem buracos num trecho de 10 km da estrada?

Solução

Seja T a distância entre os buracos numa estrada. Pelo enunciado, T é uma variável Exponencial com $\lambda = 1/5$ buracos por km. Queremos encontrar $Pr(T > 10) = \exp(-10/5) = \exp(-2) = 0.1353$.