Módulo básico - Tópicos de Estatística e Probabilidade
ONS – 2006/2007 - Profa. Mônica Barros
LISTA DE EXERCÍCIOS # 2

PROBLEMA 1

O retorno mensal de certo investimento de risco pode ser modelado pela variável aleatória R com função de probabilidade dada abaixo :

r	-5 %	0 %	5 %	10 %	15 %
Pr(R = r)	0.40	0.15	0.20	0.20	0.05

a) Calcule o **retorno esperado** (em %) do investimento e sua **variância** e **desvio padrão.**

b) Considere agora a variável aleatória X , onde X = 0 se houve retorno negativo ou zero, e X =1 ("sucesso") se houve retorno positivo. Suponha que você aplica o seu dinheiro por 12 meses consecutivos, e que as aplicações em meses subsequentes são independentes e com a mesma probabilidade de "sucesso" . Qual a probabilidade de obter retorno positivo em 7 ou mais meses?

Solução

a)

Média	1.75%
$E(R^2)$	0.00463
variância	0.00432
d.padrão	6.57%

b) A variável X é Bernoulli com probabilidade de sucesso p = 0.20 + 0.20 + 0.05. Seja Y $= \sum_{i=1}^{12} X_i$. Então Y tem distribuição Binomial (n = 12, p = 0.45).

Desejamos calcular Pr(Y > 7) = Pr(Y = 8) + Pr(Y = 9) + ... + Pr(Y = 12) =

y	prob
8	7.62%
9	2.77%
10	0.68%
11	0.10%
12	0.01%
Pr(Y > 7)	**11.17%**

PROBLEMA 2

Um engenheiro encarregado da manutenção de uma certa máquina notou que os defeitos têm três possíveis causas (elétrica, mecânica e operacional). Os custos de reparo, por sua vez, estão associados ao tipo de defeito encontrado, e são:

$$C = \begin{cases} \text{R\$ } 200 & \text{falha elétrica} \\ \text{R\$ } 350 & \text{falha mecânica} \\ \text{R\$ } 50 & \text{falha operacional} \end{cases}$$

A experiência passada mostra que 20% dos defeitos são causados por falhas elétricas, e 50% por falhas mecânicas.

a) Qual o custo esperado de reparo da máquina em R$?
b) Qual o desvio padrão do custo de reparo da máquina?

Solução

a) A probabilidade de uma falha operacional é 1 – 0.2 – 0.5 = 0.3. O custo esperado de reparo da máquina é:
E(C) = 200.(0.2) + 350(0.5) + 50(0.3) = R$ 230

b) A variância dos custos é: $VAR(C) = E(C^2) - (E(C))^2 = E(C^2) - (230)^2 = 80000 - 52900 = 17100$
Logo, o desvio padrão dos custos é:
$\sigma = \sqrt{17100} = R\$130.77$

PROBLEMA 3

A probabilidade de uma pessoa ser fumante na população é 10%. Você é fumante e quer acender seu cigarro mas perdeu seu isqueiro. Suponha que os eventos {ter isqueiro} e {ser fumante} são equivalentes. Você sai perguntando a cada pessoa numa enorme fila se elas têm isqueiro.

a) Qual a probabilidade de precisar perguntar a pelo menos cinco pessoas antes de encontrar um fumante?
b) Na média, a quantas pessoas você terá que perguntar por um isqueiro até encontrar um fumante?

Solução

Este é um problema típico da distribuição Geométrica.
Cada repetição de Bernoulli pode ser descrita como:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se a i-ésima pessoa não tem isqueiro} \\ 1 & \text{se a i-ésima pessoa TEM isqueiro ("sucesso")} \end{cases}$$

Seja Y o número de pessoas a quem você tem que perguntar antes de encontrar a primeira com um isqueiro. Então Y é uma variável Geométrica com probabilidade de sucesso p = 10% e a sua função de probabilidade é:

$$\Pr(Y = y) = (0.9)^{y-1}(0.1) \quad y = 1,2,3,....$$

a) Pr(Y ≥ 5) = Pr(Y = 5) + Pr(Y = 6) + Pr(Y = 7) + ... = 1 – Pr(Y ≤ 4) =
= 1 – Pr(Y = 1) - Pr(Y = 2) - Pr(Y = 3) - Pr(Y = 4) = 1 – (0.1).(1 + 0.9 + 0.92 + 0.93)
= 1- 0.3439 = 0.6561

b) A média da distribuição Geométrica é:

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ pessoas}$$

PROBLEMA 4

O consumo mensal em minutos por conta de celular numa certa região é uma v.a. Normal com média 40 minutos e desvio padrão 12 minutos.

a) Qual a probabilidade de alguém usar o celular menos de 50 minutos?
b) Qual a probabilidade de alguém usar o celular mais de 35 minutos?
c) Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 10% que mais usam o aparelho?
d) Quantos minutos por mês alguém deve passar no celular para estar entre os 5% que MENOS usam o aparelho?

Toma-se uma amostra de 24 usuários de celular.

e) Qual a probabilidade do tempo médio de uso na amostra exceder 45 minutos?
f) Qual a probabilidade do maior tempo de uso na amostra ser menor que 50 minutos?
g) Qual a probabilidade do menor tempo de uso na amostra ser menor que 40 minutos?

Solução

X = consumo em minutos ~ N(40, 12^2)

a) Pr(X < 50) = $\Pr\left(\frac{X-40}{12} < \frac{50-40}{12}\right) = \Pr(Z < 10/12) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) = \Phi(0.8333) = 0.7977$

b) Pr(X > 35) = $\Pr\left(\frac{X-40}{12} > \frac{35-40}{12}\right) = 1 - \Pr(Z > -5/12) = 1 - \Phi\left(\frac{-5}{12}\right) =$

$$= 1 - \Phi(-0.4167) = \Phi(+0.4167) = 0.6615$$

c) Para ser um dos 10% que mais usam o aparelho, a variável normalizada é z = 1.2816

Logo:

$$\frac{X-40}{12}=1.2816 \Leftrightarrow X=40+12(1.2816)=55.38 \text{ minutos}$$

d) Para estar entre os 5% que menos usam o celular, a variável normalizada é z = -1.645 e então:

$$\frac{X-40}{12}=-1.645 \Leftrightarrow X=40+12(-1.645)=20.26 \text{ minutos}$$

Agora considere uma amostra de 24 usuários de celular. O tempo médio é uma variável Normal com média 40 minutos e variância $(12)^2/24 = 6$.

e) $$\Pr(\overline{X}>45)=\Pr\left(\frac{\overline{X}-40}{\sqrt{6}}>\frac{45-40}{\sqrt{6}}\right)=\Pr\left(Z>\frac{45-40}{\sqrt{6}}\right)=\Pr(Z>2.0412)=$$
$$=1-\Phi(2.0412)=1-0.9794=0.0206$$

f) Seja V = Max(X_1, X_2, ..., X_{24}). Então Pr(V < 50) = Pr(X_1 < 50, X_2 < 50, ..., X_{24} < 50) e como os X_i´s são iid, esta probabilidade é igual a $\{\Pr(X_1 < 50)\}^{24}$. Mas:

$$\Pr(X_1<50)=\Pr\left(\frac{X_1-40}{12}<\frac{50-40}{12}\right)=\Pr\left(Z<\frac{50-40}{12}\right)=\Phi(0.8333)=0.7977$$

(vide item a))

E então: Pr(V < 50) = $(0.7977)^{24}$ = 0.0044

g) Seja U = Min(X_1, X_2, ..., X_{24}). Então:

Pr(U < 40) = 1 - Pr(U ≥ 40) = 1- Pr(X_1 ≥ 40, X_2 ≥ 40, ..., X_{24} ≥ 40) = 1 – $\{\Pr(X_1 \geq 40)\}^{24}$ =

= 1 – $\{0.50\}^{24}$ = 100%

Problema 5

Num bar existem 60 pessoas, de dois grupos: "bebedores de chopp" (35 pessoas) e "bebedores de tequila". Toma-se uma amostra sem reposição de 8 pessoas. Qual a probabilidade de encontrar pelo menos 5 bebedores de chopp na amostra?

Solução

Seja X a variável que mede o número de bebedores de chopp na amostra. Então a função de probabilidade de X é:

$$\Pr(X=x)=\frac{\binom{35}{x}\binom{25}{8-x}}{\binom{60}{8}} \quad \text{onde } x=0,1,2,....8$$

Pr(X =5)	0.2918
Pr(X =6)	0.1903
Pr(X =7)	0.0657
Pr(X =8)	0.0092

A soma destas probabilidades nos dá: Pr(X ≥ 5) = **0.5570**

PROBLEMA 6

O salário dos funcionários numa empresa pode ser modelado por uma variável contínua X com a seguinte densidade:

$f(x) = c.x^2$ se 1000 ≤ X ≤ 8000

a) Ache a constante c que faz de f(x) uma densidade.
b) Qual o salário médio?
c) Ache o ponto m entre 1000 e 8000 tal que Pr(X ≤ m) = 0.50. Este ponto é a mediana de X, ou seja, o salário mediano dos funcionários desta empresa?

Solução

a) Para achar c precisamos satisfazer a condição:

$$\int_{1000}^{8000} cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow c.\frac{x^3}{3}\Bigg|_{1000}^{8000} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{3}(10)^9\{512-1\} = 1 \Leftrightarrow \frac{511(10)^9 c}{3} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{511(10)^9}$$

b) O salário médio é dado por:

$$E(X) = \int_{1000}^{8000} x.f(x)dx = \int_{1000}^{8000} x\frac{3}{511(10)^9}x^2 dx = \frac{3}{511(10)^9}\frac{x^4}{4}\Bigg|_{1000}^{8000} = \frac{3}{(4)511(10)^9}(4096-1)(10)^{12} = \frac{3(4095)(10)^{12}}{(4)511(10)^9} =$$

$$= \frac{3000(4095)}{4(511)} = 6010.27$$

c) O salário mediano é obtido resolvendo-se:

$$\int_{1000}^{m} f(x)dx = 0.5 \Leftrightarrow \int_{1000}^{m} cx^2 dx = 0.5 \Leftrightarrow \frac{c}{3}\left(m^3 - 10^9\right) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{1}{511(10)^9}\left(m^3 - 10^9\right) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 10^9 = \frac{511(10)^9}{2} \Leftrightarrow m^3 = 10^9\left\{1 + \frac{511}{2}\right\} \Leftrightarrow m^3 = 10^9\{256.5\} \Leftrightarrow m = 10^3(256.6)^{1/3} = 6353.74$$

PROBLEMA 7

Você trabalha numa empresa que vende produtos pelo telefone. Apenas 20% das chamadas resultam numa venda. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a primeira venda ocorra na 8a. ligação telefônica.
b) De que sejam necessárias 13 ligações para que você consiga fazer a quarta venda?
c) Se você faz exatamente 13 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar exatamente 3 vendas?

d) Se você faz exatamente 20 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar entre 2 e 4 vendas (inclusive 2 e 4)?

Solução

a) Neste caso X representa a ligação em que ocorre a 1ª. venda, e X é uma variável Geométrica com probabilidade p =0.2. Logo:

$$\Pr(X = 8) = (0.8)^7 (0.2) = 0.0419$$

b) Aqui a variável de interesse é o número de ligações até que a 4ª. venda seja efetuada, ou seja, trata-se de uma variável Binomial Negativa com parâmetros r = 4 e p = 0.2.

$$\Pr(X = 13) = \binom{12}{3}(0.8)^9 (0.2)^4 = 0.0472$$

c) Neste caso o número de chamadas é fixo a priori e portanto temos uma variável Binomial. X aqui representa o número de chamadas que resultaram em vendas dentre as 13 chamadas realizadas. Então X é Bin(n = 13, p =0.2).

$$\Pr(X = 3) = \binom{13}{3}(0.2)^3 (0.8)^{10} = 0.2457$$

d) Neste caso você faz exatamente 20 ligações e quer saber a probabilidade de completar 2, 3 ou 4 vendas. X é o número de chamadas que resultam em vendas dentre as 20 realizadas, e assim X é Bin(n = 20, p = 0.2).

$$\Pr(X = x) = \binom{20}{x}(0.2)^x (0.8)^{20-x} \quad \text{para } x = 0,1,2,....20$$

Avalie esta última expressão para x = 2, 3, 4

x	Prob.
2	0.1369
3	0.2054
4	0.2182
Soma	0.5605

Então Pr($2 \le X \le 4$) = 0.5605

Problema 8

Um estudante universitário gasta em média R$ 600,00 em livros por ano. A dispersão entre os valores gastos, medida pelo desvio padrão, é R$ 240,00. Além disso, pode-se encarar os valores gastos pelos universitários como independentes entre si e Normalmente distribuídos. Além disso, a maioria dos estudantes adquire livros pela Internet.

a) Uma grande livraria na Internet pretende oferecer um cartão VIP aos clientes que mais compram livros. Apenas os 1% que mais consomem livros num período de um ano receberão o cartão. Acima de qual volume anual de compras um consumidor se candidata ao cartão VIP?
b) Considere 16 estudantes universitários. Qual a probabilidade do gasto médio anual em livros destas 16 pessoas ultrapassar R$ 660,00?
c) Dentre as 16 pessoas nesta mesma amostra, qual a probabilidade do estudante que **menos consumiu** livros ter gasto mais de R$ 650 no ano?

Solução

a) O ponto da distribuição N(0,1) tal que a probabilidade de estar abaixo dele é 0.99 é, pela tabela, z = 2.3263.

Seja X o gasto médio anual em livros de um estudante universitário. Então X é Normal com média 600 e desvio padrão 240.

Logo:

$$Z = \frac{X - 600}{240} \sim N(0,1)$$

Pr(Z < 2.3263) = 0.99 e você será cliente VIP na livraria se: $Z = \frac{X - 600}{240} \geq 2.3263 \Leftrightarrow X \geq 1158.31$, ou seja, se gastar mais que este valor.

b) Seja $\overline{X}$ o gasto médio anual em livros de uma amostra de n estudantes universitários. Neste caso, n = 16 estudantes. Sabemos que $\overline{X}$ é Normal com média R$ 600 e variância $(240)^2/16$, isto é, desvio padrão (240)/4 = R$ 60.

$$\Pr(\overline{X} > 660) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 600}{60} > \frac{660 - 600}{60}\right) = \Pr\left(Z > \frac{660 - 600}{60}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

c) Seja U o estudante que menos gastou em livros na amostra. Se ele gastou mais de R$ 650, então TODOS NA AMOSTRA gastaram mais que R$ 650 em livros.

Ou seja, $\Pr(U > 650) = \Pr(X_1 > 650, X_2 > 650, ..., X_{16} > 650)$.

Como os X_i ´s são independentes, esta probabilidade conjunta é o produto das probabilidade dos X_i´s individuais. Além disso, os X_i´s formam uma amostra, e portanto são identicamente distribuídos, o que torna $\Pr(X_1 > 650) = \Pr(X_2 > 650) = \Pr(X_{16} > 650)$.

Então:

$\Pr(U > 650) = \{\Pr(X_1 > 650)\}^{16}$

Mas:

$$\Pr(X > 650) = \Pr\left(\frac{X-600}{240} > \frac{650-600}{60}\right) = \Pr\left(Z > \frac{650-600}{240}\right) = 1 - \Phi(0.2083) = 1 - 0.5825 = 0.4175$$

Pr(U > 650) = {Pr(X_1 > 650)}^{16} = $(0.4175)^{16}$ = 8.5162 (10^{-7})

Problema 9

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$f(x,y) = kx^2 + \frac{xy}{2}$ onde 0 < x < 1 e 0 < y < 1

a) Encontre a constante k que faz de f(x,y) uma densidade.
b) Ache a densidade marginal de X.
c) Ache a densidade marginal de Y.
d) Ache a densidade condicional de Y dado X = x.
e) Ache a média condicional de Y dado X = x.
f) X e Y são independentes? Por que?

Solução

a)

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 \left\{kx^2 + \frac{xy}{2}\right\}dxdy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left\{\frac{k}{3} + \frac{y}{4}\right\}dy = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{7}{8} \Rightarrow k = \frac{21}{8}$$

b) A densidade marginal de X é:

$$f_x(x) = \int_0^1 \left(\frac{21}{8}x^2 + \frac{xy}{2}\right)dy = \frac{21x^2}{8} + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21x^2 + 2x}{8} \qquad \text{se } 0 < x < 1$$

c) A densidade marginal de Y é:

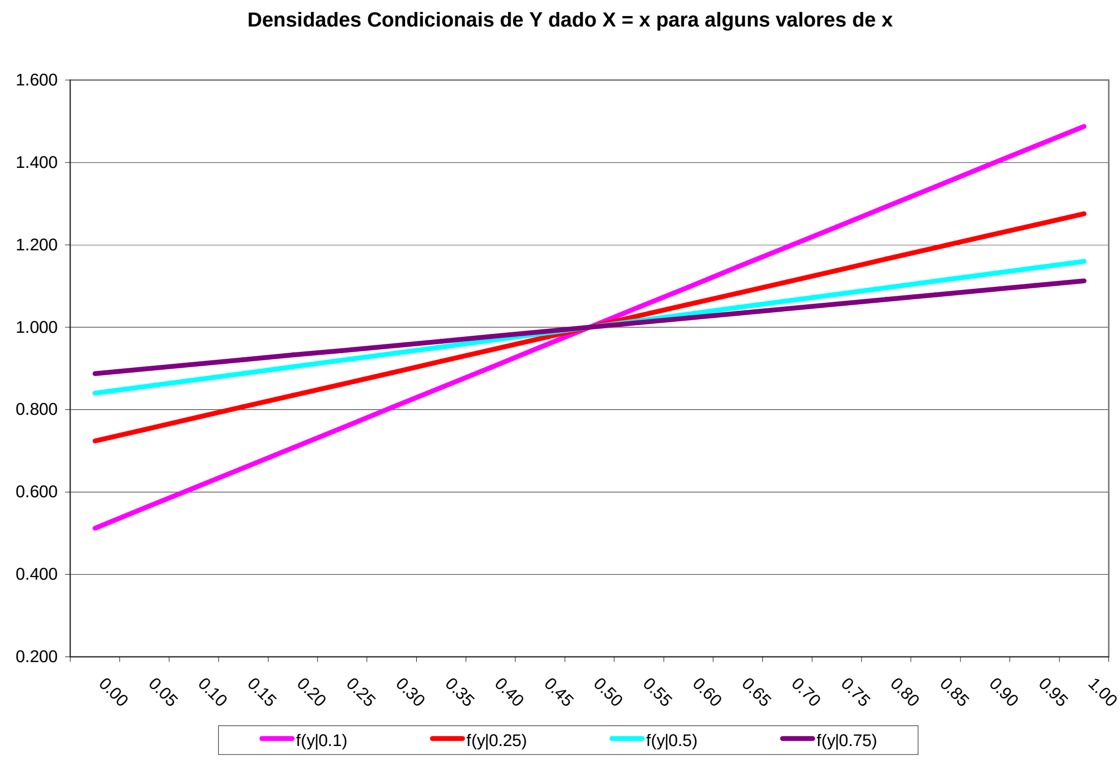
$$f_y(y) = \int_0^1 \left(\frac{21}{8}x^2 + \frac{xy}{2}\right)dx = \frac{21}{24} + \frac{y}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} + \frac{y}{4} = \frac{7+2y}{8} \qquad \text{se } 0 < y < 1$$

d) A densidade condicional de Y dado X = x é:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{21}{8}x^2 + \frac{xy}{2}}{\frac{21x^2 + 2x}{8}} = \frac{21x^2 + 4xy}{21x^2 + 2x}$$ onde 0 < y < 1 e 0 < x < 1

Note que, nesta densidade, x deve ser encarado como um parâmetro fixo, enquanto y é a variável aleatória.

Abaixo exibimos o gráfico das densidades condicionais para alguns valores de x.



e) A média condicional de Y dado X = x é:

$$E(y\,|\,x)=\int_0^1 y\left(\frac{21x^2+4xy}{21x^2+2x}\right)dy=\frac{1}{21x^2+2x}\left(21x^2\left(\frac{1}{2}\right)+4x\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{3(21x^2)+8x}{6(21x^2+2x)}=\frac{63x^2+8x}{126x^2+12x}=$$
$$=\frac{63x+8}{126x+12}=\frac{63x+8}{2(63x+6)}$$

f) X e Y não são independentes pois a densidade conjunta NÃO É o produto das marginais de X e Y.

Problema 10

O preço de um certo carro usado é uma variável Normal com média R$ 20 mil e desvio padrão R$ 2400,00.

a) Você está interessado em comprar este carro e pesquisa muitos anúncios no jornal e na internet. Como você não entende nada de mecânica, prefere comprar um carro mais caro e (supostamente) em melhores condições, pois não quer ter aborrecimentos futuros. A partir de quanto você deve pagar para comprar um carro dentre os 20% mais caros?

b) Considere uma amostra de 9 carros escolhidos aleatoriamente. Qual a probabilidade do preço médio na amostra exceder R$ 21 mil?
c) Considere uma amostra de 9 carros (como no item anterior). Qual a probabilidade do carro mais barato custar menos de R$ 18800?

Solução

Seja X o preço do carro usado. Então:

$$Z = \frac{X - 20000}{2400} \sim N(0,1)$$

a) O percentil 80% da distribuição N(0,1) é, pela tabela, z = 0.8416

Logo, para estar entre os 20% mais caros, o preço do carro deve ser IGUAL OU SUPERIOR A:

$$\frac{X - 20000}{2400} = 0.8416 \Leftrightarrow X = R\$22019.84$$

b) Numa amostra de 9 carros, o preço médio terá distribuição Normal com média R$ 20 mil e variância $(2400)^2/9$, ou seja, desvio padrão 2400/3 = 800.

$$\Pr\left(\overline{X} > 21000\right) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 20000}{800} > \frac{21000 - 20000}{800}\right) = \Pr\left(Z > 1.25\right) = 1 - \Phi\left(1.25\right) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

c) Se o carro mais barato custa MENOS que R$ 18800, nada podemos afirmar sobre os preços dos outros carros na amostra. Mas, se o carro mais barato custa MAIS que R$ 18800, então TODOS os carros na amostra custarão mais que R$ 18800.

Seja U = mín(X_1, X_2, ..., X_9) o preço do carro mais barato na amostra.
Então:

$$\Pr\left(U < 18800\right) = 1 - \Pr\left(U \geq 18800\right) = 1 - \Pr\left(X_1 \geq 18800, X_2 \geq 18800, \ldots., X_9 \geq 18800\right) =$$

$$= 1 - \left\{\Pr\left(X_1 \geq 18800\right)\right\}^9$$

pois os X_i ´s são independentes e identicamente distribuídos. Mas:

$$\Pr\left(X_1 \geq 18800\right) = \Pr\left(\frac{X_1 - 20000}{2400} > \frac{18800 - 20000}{2400}\right) = \Pr\left(Z > -0.5\right) = 1 - \Phi\left(-0.5\right) = 1 - \left[1 - \Phi\left(+0.5\right)\right] =$$

$$= \Phi\left(+0.5\right) = 0.6915$$

$$\Pr\left(U < 18800\right) = 1 - \left\{\Pr\left(X_1 \geq 18800\right)\right\}^9 = 1 - \left(0.6915\right)^9 = 0.9638$$

Problema 11

A loteria de um certo estado promete que um a cada 60 “raspadinhas” é premiada. Você decide comprar “raspadinhas” até encontrar uma premiada. Cada “raspadinha” custa R$1.50.

a) Qual o custo esperado do seu procedimento?
b) E se agora você compra “raspadinhas” até encontrar a 2ª. premiada, quando você espera gastar?
c) Qual a probabilidade de, na situação do item b), você ter que comprar mais de 6 “raspadinhas”?

Solução

a) Seja X o número de raspadinhas que você precisa comprar até encontrar a 1ª. premiada. Então X é uma variável Geométrica com probabilidade p = 1/60. A média de X é E(X) = 1/p = 60, na média você precisa comprar 60 raspadinhas para encontrar a 1ª. premiada. O custo deste procedimento é: C = 1.5X e então E(C) = 1.5E(C) = 1.5(60) = R$ 90.
b) Agora X é uma Binomial Negativa com r = 2 e p =1/60. A média de X passa a ser E(X) = 2/p = 2(60) = R$120 e o custo esperado passa a ser E(C) = 1.5E(C) = 1.5(120) = R$ 180.
c) A probabilidade de ter que comprar mais de 6 raspadinhas é:

$$\Pr(X > 6) = \Pr(X \geq 7) = 1 - \Pr\left(X \leq 6\right) =$$
$$= 1 - \Pr(X = 2) - \Pr(X = 3) - \Pr(X = 4) - \Pr(X = 5) - \Pr(X = 6)$$

Onde:

$$\Pr\left(X = x\right) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad \text{x= r, r+1, r+2,....}$$

E neste caso, como r =2, temos:

$$\Pr\left(X = x\right) = \left(x-1\right) p^2 q^{x-2} \qquad \text{x= 2, 3, 4,....}$$

x	Pr(X=x)
2	0,03%
3	0,05%
4	0,08%
5	0,11%
6	0,13%
soma	0,40%

Pr(X>6) = 99,60%

Problema 12

O preço por litro da gasolina comum no Rio de Janeiro é uma variável aleatória Normal com média R$ 2.60 e desvio padrão R$ 0.15.

a) Qual a probabilidade do litro da gasolina comum custar menos de R$ 2.50?
b) Qual a probabilidade do litro da gasolina comum custar mais de R$ 2.75?
c) Quanto um posto deve cobrar pela gasolina para estar entre os 10% mais caros?
d) Quanto um posto deve cobrar pelo litro da gasolina para estar entre os 20% mais baratos?

Toma-se uma amostra de 9 postos de gasolina.

e) Qual a probabilidade do preço médio da gasolina na amostra ser menor que R$ 2.65?
f) Qual a probabilidade do maior preço na amostra exceder R$ 2.65?
g) Qual a probabilidade do menor preço na amostra ser inferior a R$ 2.55?

Solução

Seja X o preço do litro da gasolina comum, Então X é N(2.60, $(0.15)^2$). Logo:

$Z = \dfrac{X - 2.60}{0.15}$ é N(0,1).

a) $$\Pr(X < 2.50) = \Pr\left(\frac{X - 2.60}{0.15} < \frac{2.50 - 2.60}{0.15}\right) = \Phi(-0.6667) = 1 - \Phi(+0.6667) =$$
$$= 1 - 0.7475 = 0.2525$$

b) $$\Pr(X > 2.75) = \Pr\left(\frac{X - 2.60}{0.15} > \frac{2.75 - 2.60}{0.15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

c) Na escala da N(0,1), o ponto que tem 90% de probabilidade abaixo dele (isto é, 10% de probabilidade acima dele) é: 1.2816. Precisamos transformar este ponto no seu equivalente na escala dos preços da gasolina.

$Z = \dfrac{X - 2.60}{0.15} = 1.2816 \Leftrightarrow X = 2.60 + 0.15(1.2816) = 2.7922$. Logo, um posto estará entre os 10% mais caros se cobrar acima de R$ 2.7922 por litro.

d) Na escala da N(0,1), o ponto 0.8416 tem probabilidade 80% de estar abaixo dele (e 20% de estar acima). Logo, por simetria, a probabilidade de estar abaixo do ponto –0.8416 é 20%. Transformando para a escala dos preços da gasolina:

$$Z = \frac{X - 2.60}{0.15} = -0.8416 \Leftrightarrow X = 2.60 - 0.15(0.8416) = 2.4738$$

e) Toma-se uma amostra de 9 postos. A média amostral é uma variável Normal com média 2.60 e variância $(0.15)^2/9$, ou seja, desvio padrão 0.15/3 = 0.05.

$$\Pr\left(\bar{X} < 2.65\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 2.60}{0.05} < \frac{2.65 - 2.60}{0.05}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

f) Seja V = Max(X_1, X_2, ..., X_9). Então Pr(V > 2.65) = 1- Pr(V ≤ 2.65) =
= 1 - Pr(X_1 < 2.65, X_2 < 2.65, ..., X_9 < 2.65) e como os X_i´s são iid, esta probabilidade é igual a:
1- $\{\Pr(X_1 < 2.65)\}^9$.
Mas:

$$\Pr\left(X_1 < 2.65\right) = \Pr\left(\frac{X_1 - 2.60}{0.15} < \frac{2.65 - 2.60}{0.15}\right) = \Pr\left(Z < \frac{0.05}{0.15}\right) = \Phi(0.3333)$$

$$= 0.6306$$

E então: Pr(V > 2.65) = 1 - $(0.6306)^9$ = **0.9842**

g) Seja U = Min(X_1, X_2, ..., X_9). Então:
Pr(U < 2.55) = 1 - Pr(U ≥ 2.55) = 1- Pr(X_1 ≥ 2.55, X_2 ≥ 2.55, ..., X_9 ≥ 2.55) = 1 – $\{\Pr(X_1 \geq 2.55)\}^9$
Mas:

$$\Pr\left(X_1 \geq 2.55\right) = \Pr\left(\frac{X_1 - 2.60}{0.15} \geq \frac{2.55 - 2.60}{0.15}\right) = \Pr\left(Z \geq -\frac{0.05}{0.15}\right) =$$

$$1 - \Phi(-0.3333) = \Phi(+0.3333) = 0.6306$$

E então: Pr(U < 2.55) = 1 – $\{0.6309\}^9$ = **0.9842**