IND 1115 – Inferência Estatística – Semestre 2004.01
Teste 1 – 29/04/2004
Nome: ____

Problema 1 (30 pontos)
Seja X_1, X_2, ... , X_n uma amostra aleatória de uma densidade Uniforme(0,θ) onde θ é desconhecido.
a) Mostre que o MLE (estimador de máxima verossimilhança) de θ é:
$X_{(n)} = \text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

b) Encontre um estimador por método de momentos de θ.
c) O MLE de θ é não tendencioso?
d) O MLE de θ é consistente?
e) Coleta-se uma amostra de tamanho 10 da Uniforme(0,θ). Os valores observados são:
1,53 0,40 2,39 3,60 3,54
3,83 0,06 1,63 3,45 0,55
Compare o MLE e o estimador por método dos momentos de θ baseados nesta amostra.

Dica:
A função de distribuição de $X_{(n)}$ é: $\Pr(X_{(n)} \leq x) = \Pr(\text{máx}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq x) =$
$= \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x)$

Problema 2 (15 pontos)
Provas ligeiramente diferentes foram aplicadas a duas turmas da mesma disciplina. Os resultados são mostrados a seguir:

	Turma 1	Turma 2
Nota média	75	80
Desvio padrão	15	25
Número de alunos	10	8

a) Encontre intervalos de confiança 90% e 95% para a diferença $\mu_1 - \mu_2$ onde μ_1 e μ_2 são, respectivamente, as médias das turmas 1 e 2. Suponha que as notas nas duas turmas são Normais e as duas amostras (turmas) são independentes.

b) Que hipótese adicional (além das indicadas no item a)) está implícita na obtenção dos IC do item a)?

Problema 3 (30 pontos)

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição Geométrica(p), ou seja, a função de probabilidade é dada por:

$$\Pr(X = x) = f(x) = q^{x-1}p = (1-p)^{x-1}p \quad \text{para } x = 1,2,3.....$$

a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de p.

b) Encontre o MLE de Pr(X > 2).

c) Encontre a informação de Fisher.

Dica: Série Geométrica

$$\sum_{x=1}^{\infty} a^x = \frac{a}{1-a} \quad \text{se } |a| < 1$$

Dica 2: Se X tem distribuição Geométrica(p) então E(X) = 1/p

Problema 4 (10 pontos)

Aproxime, com base no Teorema Central do Limite, as seguintes probabilidades:

$$a)\ \Pr\left(\chi^2_{20} \le 22\right)$$
$$b)\ \Pr\left(\chi^2_{30} > 36\right)$$

Pontos Percentuais

Variável t com p graus de liberdade

Exemplo

Se T tem densidade t com 12 graus de liberdade, Pr(T <= 1.782) = 95%

Graus de liberdade	60%	75%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
35	0,255	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724

Tabela da Função de Distribuição da N(0,1)

z	$\phi(z)$	z	$\phi(z)$	z	$\phi(z)$	z	$\phi(z)$
0,000	**0,5000**	0,295	0,6160	**0,450**	**0,6736**	**0,700**	**0,7580**
0,100	**0,5398**	**0,300**	**0,6179**	0,455	0,6754	0,750	0,7734
0,150	**0,5596**	0,305	0,6198	0,460	0,6772	0,800	0,7881
0,155	0,5616	0,310	0,6217	0,465	0,6790	0,850	0,8023
0,160	0,5636	0,315	0,6236	0,470	0,6808	0,900	0,8159
0,165	0,5655	0,320	0,6255	0,475	0,6826	0,950	0,8289
0,170	0,5675	0,325	0,6274	0,480	0,6844	**1,000**	**0,8413**
0,175	0,5695	0,330	0,6293	0,485	0,6862	1,050	0,8531
0,180	0,5714	0,335	0,6312	0,490	0,6879	1,100	0,8643
0,185	0,5734	0,340	0,6331	0,495	0,6897	1,150	0,8749
0,190	0,5753	0,345	0,6350	**0,500**	**0,6915**	**1,200**	**0,8849**
0,195	0,5773	**0,350**	**0,6368**	0,505	0,6932	1,250	0,8944
0,200	**0,5793**	0,355	0,6387	0,510	0,6950	1,300	0,9032
0,205	0,5812	0,360	0,6406	0,515	0,6967	1,350	0,9115
0,210	0,5832	0,365	0,6424	0,520	0,6985	1,400	0,9192
0,215	0,5851	0,370	0,6443	0,525	0,7002	1,450	0,9265
0,220	0,5871	0,375	0,6462	0,530	0,7019	**1,500**	**0,9332**
0,225	0,5890	0,380	0,6480	0,535	0,7037	1,550	0,9394
0,230	0,5910	0,385	0,6499	0,540	0,7054	1,600	0,9452
0,235	0,5929	0,390	0,6517	0,545	0,7071	1,650	0,9505
0,240	0,5948	0,395	0,6536	**0,550**	**0,7088**	1,700	0,9554
0,245	0,5968	**0,400**	**0,6554**	0,555	0,7106	1,750	0,9599
0,250	**0,5987**	0,405	0,6573	0,560	0,7123	**1,800**	**0,9641**
0,255	0,6006	0,410	0,6591	0,565	0,7140	1,850	0,9678
0,260	0,6026	0,415	0,6609	0,570	0,7157	1,900	0,9713
0,265	0,6045	0,420	0,6628	0,575	0,7174	1,950	0,9744
0,270	0,6064	0,425	0,6646	0,580	0,7190	**2,000**	**0,9772**
0,275	0,6083	0,430	0,6664	0,585	0,7207	2,050	0,9798
0,280	0,6103	0,435	0,6682	0,590	0,7224	2,100	0,9821
0,285	0,6122	0,440	0,6700	0,595	0,7241	2,150	0,9842
0,290	0,6141	0,445	0,6718	**0,600**	**0,7257**	2,200	0,9861