Módulo de Regressão e Séries Temporais

Parte 2

Mônica Barros, D.Sc.

Julho de 2007

Quem sou eu?

- **Mônica Barros**
  - **Doutora em Séries Temporais – PUC-Rio**
  - **Mestre em Estatística – University of Texas at Austin, EUA**
  - **Bacharel em Matemática – University of Washington, Seattle, EUA**
  - **Professora da PUC-Rio (Depto. De Eng. Elétrica)**
  - **E-mails: monica@ele.puc-rio.br, monica@mbarros.com**
  - **Home page: http://www.mbarros.com**

Programa do Curso

- **Métodos de Amortecimento Exponencial**
  - **Modelos de médias móveis**
  - **Modelo de Brown**
  - **Modelo de Holt-Winters**
  - **Estimação dos parâmetros**
  - **Estatísticas de ajustes e análise dos resíduos**
  - **Exercícios**

Programa do Curso

- **Modelagem ARIMA de Box & Jenkins sazonal e não sazonal**
  - **Função de autocorrelação e autocorrelação parcial**
  - **Modelo**
  - **Identificação de (p, q, d, P, Q, D)**
  - **Estimação**
  - **Estatísticas de ajuste e análise dos resíduos**
  - **Exercícios**

Programa do Curso

- **Modelos de Regressão Dinâmica**
  - Função de correlação cruzada
  - Modelo
  - Identificação / estimação
  - Estatísticas de ajustes e análise dos resíduos
  - Exercícios

MÉTODOS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

(BROWN, HOLT & WINTERS)

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

NOTAÇÃO

- $Z_1, Z_2, ... Z_T$ é uma série temporal de tamanho T
- $\hat{Z}_T(\tau)$ é a previsão de $Z_{T+\tau}$ feita no instante T, ou seja, com uma antecedência de τ instantes.
- τ é chamado de "horizonte de previsão"

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Roteiro**
- Modelos Constante, Linear, Quadrático
- Sazonalidade Aditiva e Multiplicativa
- Métodos de Estimação em cada uma destas combinações e o que precisa ser estimado em cada modelo.

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

MÉTODOS AUTOMÁTICOS GERAIS

- **MÉTODO INGÊNUO (OU "NAIVE")**

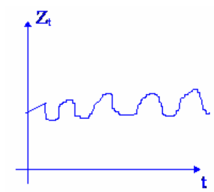
$$\hat{Z}_T(\tau) = Z_T \quad \text{para} \quad \tau = 1,2,3,\ldots$$

- **A previsão para qualquer instante futuro feita usando a série até o instante T é apenas o último valor observado.**
- **É claro que você não precisa de um "software" para ajustar isso e, em alguns casos, é o único "método" disponível.**
- **Um exemplo clássico é a previsão do preço de uma ação - geralmente a melhor previsão para o preço de amanhã é o preço de hoje.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- **O modelo é: $Z_t = a + e_t$**
- **onde e_t é um ruído com média zero e variância constante σ^2_e. Logo, a série oscila em torno de um nível médio constante ("a") que precisamos estimar.**



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- **Como estimar o nível médio da série ("a")?**
- **Uma possibilidade é, a cada instante, usar como previsão a média das últimas N observações.**
- **Um dos problemas com este método é a escolha de N, o tamanho da janela a ser utilizado.**
- **Quanto maior o valor de N, mais "suave" é a previsão. Ao contrário, se N é pequeno, a previsão tende a ser meio "nervosa", isto é, oscila muito.**
- **Este método é chamado de médias móveis simples.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- **Uma característica importante do método de médias móveis é: todas as observações usadas para o cálculo têm o mesmo peso (que é 1/N).**
- **Mas, na prática é razoável supor que as observações mais recentes sejam mais relevantes para a previsão dos próximos valores da série, e portanto deveriam receber um peso maior que as observações mais antigas. Esta idéia de pesar ou ponderar as observações de acordo com as suas "idades" leva aos diversos métodos de amortecimento exponencial.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- O nível médio da série num certo instante é estimado como a média móvel de tamanho N usando as observações Z_T, Z_{T-1}, ..., Z_{T-N+1}, isto é:

$$\hat{a}(T) = M_T = \frac{Z_{T-N+1} + \ldots + Z_{T-1} + Z_T}{N}$$

- Note que, se N = 1, apenas a última observação é usada, e o método se reduz ao método ingênuo. Por outro lado, se N = T (tamanho da série), temos o chamado "método conservador", em que todas as observações disponíveis são usadas na estimação do nível médio da série, e $\hat{a}(T) = \bar{Z}$, média amostral da série.

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- Escolha do tamanho da janela
  - O tamanho da janela utilizada (N) no método de médias móveis pode ser escolhido como o inteiro positivo que minimiza a soma de quadrados dos erros de previsão 1 passo à frente, isto é, escolhe-se N de forma a minimizar:

$$S(N) = \sum_{t=1}^{T} e_1^2(t)$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- O estimador do nível da série por médias móveis pode ser escrito como:

$$\hat{a}(T) = M_T = \frac{Z_{T-N+1} + \ldots + Z_{T-1} + Z_T}{N} = M_{T-1} + \frac{Z_T - Z_{T-N}}{N}$$

- Onde M_{T-1} é a média móvel de tamanho N calculada no instante anterior.
- Em outras palavras, o estimador do nível envolve uma informação "atual" (representada por Z_T, o último valor observado da série) e uma informação "passada" (M_{T-1} e Z_{T-N}).

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- O método de amortecimento exponencial estende esta idéia de ponderação da informação presente e passada. Na equação anterior substitua Z_{T-N} por M_{T-1}. Isso nos leva ao seguinte estimador:

$$\hat{a}(T) = M_{T-1} + \frac{Z_T}{N} - \frac{M_{T-1}}{N} = \left(\frac{1}{N}\right) Z_T + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{T-1}$$

- Este novo estimador tem a forma:
  (peso)*(informação atual) +
  +(1 – peso)*(informação passada).

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- **Note que â(T) é a previsão do nível da série efetuada no instante atual T e podemos reescrever esta última equação como:**

$$\hat{a}(T) = \left(\frac{1}{N}\right) Z_T + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{T-1} = \left(\frac{1}{N}\right) Z_T + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \hat{a}(T-1)$$

- **onde â(T –1) é a média móvel de tamanho N calculada até (inclusive) a observação T-1, ou seja, é a estimativa prévia do nível da série. Em outras palavras: a previsão atual do nível (dada por â (T)) é baseada na ponderação do valor mais recente da série (Z_T) e da última previsão para o nível (â (T –1)).**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Constante

- **Uma forma mais geral de definir um estimador que pondere as informações passadas e presentes é:**

$$\hat{a}(T) = M_T = \alpha Z_T + (1-\alpha) M_{T-1} = \alpha . Z_T + (1-\alpha)\hat{a}(T-1)$$

- **onde $\alpha \in [0, 1]$ é a *constante de amortecimento*, que controla a taxa de decaimento da informação ao longo do tempo.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

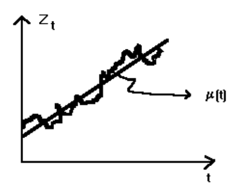
Modelo Constante

- **Por substituições sucessivas na última equação podemos concluir que:**
- **$M_T = \alpha Z_T + \alpha(1-\alpha) Z_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Z_{T-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{T-1} Z_1$**

- **Esta última equação mostra claramente como funciona o método de amortecimento exponencial:**
  - **cada estimativa do nível (dada por M_T) é uma soma ponderada da observação atual (Z_T) e das observações passadas. Os pesos decrescem exponencialmente, e a taxa de decaimento dos pesos depende da constante α.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Linear



$$Z_t = a_1 + a_2 t + \varepsilon_t$$

Onde:

$$E\{\varepsilon_t\} = 0$$

$$Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$$

- **Desta expressão (e usando as propriedades da média e variância) segue que:**

$$E(Z_t) = a_1 + a_2 . t \qquad VAR(Z_t) = \sigma^2 = VAR(\varepsilon_t)$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Linear

- **Estimação de parâmetros**
- **Neste modelo é necessário estimar três parâmetros: a_1 (coeficiente linear da série), a_2 (coeficiente angular da reta, ou seja, a taxa de crescimento da série) e σ^2_e (a variância da série).**
- **A previsão τ passos à frente obtida no instante T é:**

$$\hat{Z}_T(\tau) = E\{Z_{T+\tau} \mid \underline{Z_T}\} = E\{a_1 + a_2(T+\tau) + \varepsilon_{T+\tau} \mid \underline{Z_T}\} = \hat{a}_1(T) + \hat{a}_2(T).(T+\tau)$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Linear

- **Estimadores pelo Método de Médias Móveis Duplas**
  - **Defina a média móvel dupla de tamanho N como:**

$$M_T^{[2]} = \frac{M_T + M_{T-1} + \ldots + M_{T-N+1}}{N}$$

  - **Onde M_T é a média móvel (simples) de tamanho N calculada usando todas as observações até o instante T (inclusive).**
  - ***Por que usar médias móveis duplas?***
  - **Se os dados exibem uma tendência linear, o uso de médias móveis simples para a previsão dos valores da série induz a erros sistemáticos, pois a média móvel simples segue a tendência com um certo atraso, e este efeito é amplificado quando tentamos prever valores futuros. O método de médias móveis duplas procura diminuir este efeito sistemático.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Linear

- **Estimadores pelo Método de Médias Móveis Duplas**

$$\hat{a}_1(T) = M_T + \left(M_T - M_T^{[2]}\right) - T.\hat{a}_2(T) = 2.M_T - M_T^{[2]} - T.\hat{a}_2(T)$$

$$\hat{a}_2(T) = \frac{2}{(N-1)}\left\{M_T - M_T^{[2]}\right\}$$

- **Acima, N é o tamanho da janela usada na média móvel simples e dupla. O estimador $\hat{a}_1(T)$ é encontrado corrigindo-se a média móvel simples (M_T) pela diferença entre ela e a média móvel dupla. Se, na verdade, não existisse uma tendência linear, o fator de correção seria pequeno.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Linear

- **Equação de previsão τ passos à frente no instante T**

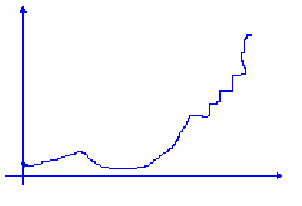
$$\hat{Z}_{T+\tau} = \hat{a}_1(T) + \hat{a}_2(T).(T+\tau) = 2.M_T - M_T^{[2]} - T.\hat{a}_2(T) + T.\hat{a}_2(T) + \tau.\hat{a}_2(T) =$$

$$= 2.M_T - M_T^{[2]} + \tau.\hat{a}_2(T) = 2.M_T - M_T^{[2]} + \tau.\left\{\frac{2}{N-1}\left\{M_T - M_T^{[2]}\right\}\right\}$$

- ***Vantagens e Desvantagens deste método***
  - **a implementação é trivial;**
  - **os estimadores obtidos pelo método não são muito influenciados por "outliers";**
  - **a escolha do número ótimo de "lags" a serem usados nas médias móveis simples e duplas não é trivial.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Modelo Quadrático



$$Z_t = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \varepsilon_t$$

Onde:
$$E\{\varepsilon_t\} = 0$$
$$Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$$

- **Estimação dos parâmetros a_1, a_2 e a_3 por médias móveis triplas.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Método de Amortecimento de Brown**

Uso: Séries não sazonais sem tendência

(i) SIMPLES (Modelo Constante)

$$Z_t = a + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \to E\{\varepsilon_t\} = 0$$
$$\varepsilon_t \to Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

EQUAÇÃO DE PREVISÃO: $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{a}(T)$

onde o estimador do parâmetro "a" no instante T é obtido por amortecimento exponencial.

Idéia Geral:

"ESTIMADOR EM T = (α). PRESENTE + (1-α).PASSADO"

$$\hat{a}(T) = \alpha Z_T + (1-\alpha)\hat{a}(T-1)$$

$$= \hat{a}(T-1) + \alpha.\hat{\varepsilon}_T(1) \text{ onde } \hat{\varepsilon}_T(1) = Z_T - \hat{Z}_{T-1}(1)$$

(Erro de Previsão 1 passo à frente)

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Valores de α próximos de 1 dão um peso maior às variações mais recentes nos dados, enquanto valores de α próximos de zero têm um efeito de maior amortecimento e refletem uma menor sensibilidade aos dados atuais.**

- **Não existe um procedimento formal para escolher α . Em geral α é escolhido através da minimização do erro de previsão um passo à frente.**

- **O método de Brown é equivalente a um modelo ARIMA(0,1,1) sem constante.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

(ii) DUPLO (Modelo Linear)

$$Z_t = a_1 + a_2 t + \varepsilon_t; \qquad \varepsilon_t \begin{cases} E\{\varepsilon_t\} = 0 \\ Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

EQUAÇÃO DE PREVISÃO: $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{a}_1(T) + \hat{a}_2(T)[T+\tau]$

- **Se, além da média, a tendência também varia ao longo do tempo, é necessário ajustar um modelo de amortecimento de ordem mais alta para "seguir" a tendência variante no tempo.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Os estimadores de $\hat{a}_1(T)$ e $\hat{a}_2(T)$ são obtidos por amortecimento exponencial, isto é, têm a forma: *"α.PRESENTE + (1-α).PASSADO"***
- **Neste modelo os estimadores são dados por:**

$$\hat{a}_1(T) = 2S_T - S_T^{[2]}$$

$$\hat{a}_2(T) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{S_T - S_T^{[2]}\right\}$$

- **e**

$$S_T = \alpha Z_T + (1-\alpha)S_{T-1}$$

$$S_T^{[2]} = \alpha S_T + (1-\alpha)S_{T-1}^{[2]}$$

- **Onde S_T é o estimador amortecido da série temporal.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

(iii) TRIPLO (Modelo Quadrático)

MODELO: $Z_t = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \varepsilon_t; \qquad \varepsilon_t \begin{cases} E\{\varepsilon_t\} = 0 \\ Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$

EQUAÇÃO DE PREVISÃO:

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{a}_1(T) + \hat{a}_2(T)[T+\tau] + \hat{a}_3(T)\cdot[T+\tau]^2$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **OS ESTIMADORES DE $\hat{a}_1(T)$, $\hat{a}_2(T)$, $\hat{a}_3(T)$ POR AMORTECIMENTO EXPONENCIAL PARA ESTE MODELO SÃO DADOS POR:**

$$\hat{a}_1(T) = 3S_T - 3S_T^{[2]} + S_T^{[3]}$$

$$\hat{a}_2(T) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\left\{S_T - 2.S_T^{[2]} + S_T^{[3]}\right\}$$

$$\hat{a}_3(T) = \left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\right)\left\{(6-5\alpha)S_T - 2.(5-4\alpha)S_T^{[2]} + (4-3\alpha)S_T^{[3]}\right\}$$

- **onde**

$$\begin{cases} S_T = \alpha Z_T + (1-\alpha)S_{T-1} \\ S_T^{[2]} = \alpha S_T + (1-\alpha)S_{T-1}^{[2]} \\ S_T^{[3]} = \alpha S_T^{[2]} + (1-\alpha)S_{T-1}^{[3]} \end{cases}$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

barros

- **Método de Brown**
  - **Simples – tendência constante**
  - **Duplo – tendência linear**
  - **Triplo – tendência quadrática**
  - **Em todos os casos, APENAS UMA constante de amortecimento**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

barros

- **Método de Holt (2 hiperparâmetros)**

MODELO: $$Z_t = a_1 + a_2 t + \varepsilon_t \quad E\{\varepsilon_t\} = 0 \quad Var\{\varepsilon_t\} = \sigma^2_\varepsilon$$

- **Tendência Linear**
  - **Ao contrário do método de Brown, aqui existem dois hiperparâmetros, um para a evolução do nível e outro para a evolução da tendência.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

barros

EQUAÇÃO DE PREVISÃO = $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{a}_1(T) + \tau.\hat{a}_2(T)$

↓

SE NÃO HÁ DESLOCAMENTO DA ORIGEM $(T + \tau)$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

barros

- **Método de Holt**
- **ESTIMADORES DE** $\hat{a}_1(T)$ **E** $\hat{a}_2(T)$
- **ENCONTRADOS VIA AMORTECIMENTO EXPONENCIAL COM DUAS CONSTANTES α E β**

$$\hat{a}_1(T) = \alpha.Z_T + (1-\alpha).[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)]$$

$$\hat{a}_2(T) = \beta[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)] + (1-\beta)\hat{a}_2(T-1)$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- SE HÁ AMORTECIMENTO DA PREVISÃO: (“DAMPED TREND”)

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{a}_1(T) + [\sum_{j=1}^{\tau} \varphi^{j-1}].\hat{a}_2(T)$$

ONDE φ É A CONSTANTE DE AMORTECIMENTO

$0 \leq \varphi \leq 1$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- ALGUMAS OBSERVAÇÕES:

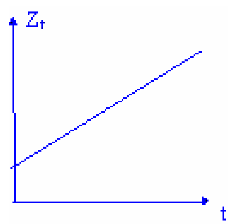
- O NOME CORRETO DEVERIA SER HOLT-2-HIPERPARÂMETROS

- A DIFERENÇA ENTRE BROWN LINEAR E O HOLT É SOMENTE O NÚMERO DE HIPERPARÂMETROS (1 NO BROWN E 2 NO HOLT)

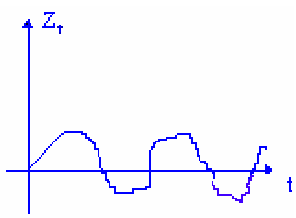
AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

5) MODELOS SAZONAIS COM TENDÊNCIA

· TENDÊNCIA



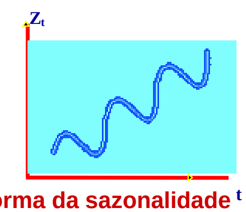
· SAZONALIDADE

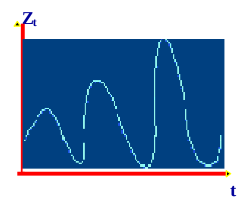


AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- Sazonalidade Aditiva e Multiplicativa

⇒ ADITIVA ⇒ MULTIPLICATIVA





A forma da sazonalidade MUDA com o nível da série

A forma da sazonalidade NÃO se altera com o nível da série

FORMA GERAL: (TENDÊNCIA) X OU + (SAZONALIDADE) + (ERRO)

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

(i) MODELO MULTIPLICATIVO

TENDÊNCIA = $a_1 + a_2 t$

FATOR SAZONAL : C_t; ou seja $C_1, C_2, \ldots C_L$

ONDE L É O COMPRIMENTO DA SAZONALIDADE

MODELO: $Z_t = (a_1 + a_2 t).C_t + \varepsilon_t$

NORMALIZAÇÃO: $\sum_{t=1}^{L} C_t = L$ **(FATOR SAZONAL NORMALIZADO)**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

EQUAÇÃO DE PREVISÃO:

$$Z_T(\tau) = [\hat{a}_1(T) + \tau\ .\hat{a}_2(T)].C_{m(T+\tau)}^{(T)}$$

ONDE $m(T+\tau)$

É O MÊS CORRESPONDENTE AO INSTANTE T+τ

ORIGEM DESLOCADA PARA INSTANTE T

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

(ii) MODELO ADITIVO

MODELO: $Z_t = (a_1 + a_2 t) + C_t + \varepsilon_t$

NESTE CASO: $\sum_{i=1}^{L} C_t = 0$ **, a soma dos fatores sazonais aditivos é zero**

EQUAÇÃO DE PREVISÃO:

$$Z_T(\tau) = [\hat{a}_1(T) + \tau.\hat{a}_2(T)] + C_{m(T+\tau)}^{(T)}$$

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Modelo Holt-Winters Multiplicativo**

$$Z_t = (a_1 + a_2 t).C_{m(t)} + \varepsilon_t;$$

ε_t: $E\{\varepsilon_t\} = 0$; $Var\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$

- **Série tem tendência linear e sazonalidade MULTIPLICATIVA.**

HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVO

- Onde:

  a_1 : NÍVEL

  a_2: INCLINAÇÃO

  m(t): MÊS (TRIMESTRE OU SEMANA) CORRESPONDENTE AO INSTANTE "t"

  $C_{m(t)}$: FATOR SAZONAL CORRESPONDENTE AO "MÊS" "t"

- RESTRIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO: $\sum_{i=1}^{L} C_i = L$

- ONDE L É O COMPRIMENTO DO PERÍODO SAZONAL (por exemplo, 12 no caso de dados mensais).

HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVO

PREVISÃO:

$$\hat{Z}_T(\tau) = [(\hat{a}_1(T) + \hat{a}_2(T).\tau].\hat{C}_{m(T+\tau)}(T)$$

- Obtida substituindo-se cada componente (nível, tendência, fator sazonal) por seu estimador.

ATUALIZAÇÃO "ON-LINE" DOS PARÂMETROS:

- O nível estimado é função da última observação, fator sazonal estimado e estimativas anteriores do nível e tendência.

$$\hat{a}_1(T) = \alpha\left(\frac{Z_T}{\hat{C}_{m(T)}(T-1)}\right) + (1-\alpha)\{\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)\}$$

HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVO

- **ATUALIZAÇÃO "ON-LINE" DOS PARÂMETROS**

$$\hat{a}_2(T) = \beta.[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)] + (1-\beta).\hat{a}_2(T-1)$$

- **A taxa de crescimento estimada é função dos níveis estimados em T e T-1 e da taxa de crescimento estimada anteriormente.**

- **A constante de amortecimento (β) é diferente daquela usada para a atualização do nível.**

HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVO

- **ATUALIZAÇÃO "ON-LINE" DOS PARÂMETROS**

$$\hat{C}_{m(T)}(T) = \gamma\left(\frac{Z_T}{\hat{a}_1(T)}\right) + (1-\gamma)\hat{C}_{m(T)}(T-1)$$

  - **O fator sazonal correspondente ao "mês" T é função do fator sazonal correspondente ao mesmo mês no "ano" anterior e também da última observação.**

$$\hat{C}_J(T) = \hat{C}_J(T-1); \qquad J = 1,2,\ldots,L; \qquad J \neq m(t)$$

  - **Logo, o fator sazonal correspondente a um certo "mês" só é atualizado uma vez por ano, ao recebermos o dado referente àquele "mês".**

  - **As constantes de amortecimento do modelo são α, β e γ, restritas ao intervalo [0,1].**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Resumo

Método de Brown

- Séries não sazonais
- Tendência: constante, linear ou quadrática (1, 2 ou 2 parâmetros)
- Apenas 1 hiperparâmetro (α)

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Resumo

Método de Holt com 2 parâmetros

- Séries não sazonais
- Tendência Linear (2 PARÂMETROS, a_1 e a_2)
- Usa 2 HIPERPARÂMETROS (constantes de amortecimento) α E β

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Resumo

Método de Holt e Winters Multiplicativo

- Modelo Sazonal Multiplicativo com Tendência Linear
- Tem L+2 parâmetros (onde L é o comprimento do período sazonal)

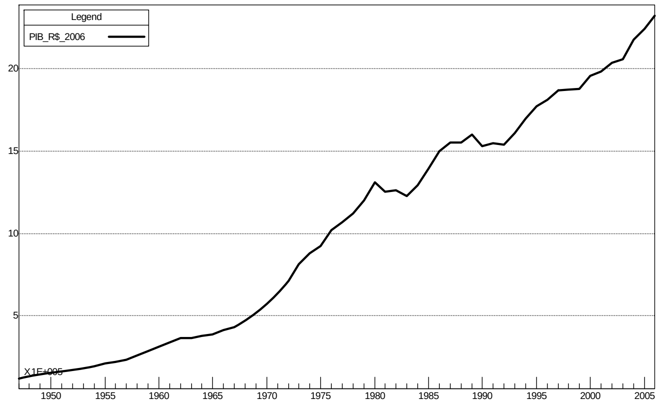
$\Rightarrow$ Usa 3 hiperparâmetros (α, β e γ).

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- Exemplo (Série não sazonal)
- PIB brasileiro – 1947 a 2006 em R$ de 2006
- Fonte: IPEADATA
- Produza previsões usando amortecimento exponencial para os anos 2007-2015 usando o Forecast Pro e interprete os resultados gerados.

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Gráfico da Série



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Resultados do ajuste – Método de Holt

Forecast Model for PIB_R$_2006
Holt exponential smoothing: Linear trend, No seasonality
Confidence limits proportional to level

Component	Smoothing Weight	Final Value
Level	1.00000	2.3228e+006
Trend	0.15558	57200.

É praticamente o valor da série no último ponto (PIB de 2006)

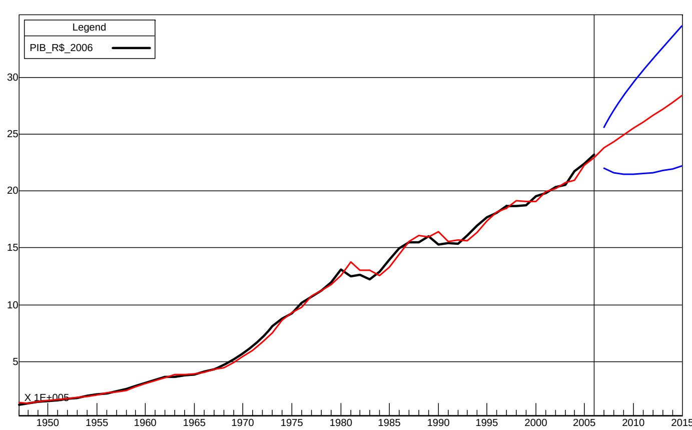
Within-Sample Statistics

Sample size 60	Number of parameters 2
Mean 1.021e+006	Standard deviation 6.939e+005
R-square 0.997	Adjusted R-square 0.9969
Durbin-Watson 1.639	* Ljung-Box(18)=32.85 P=0.9826
Forecast error 3.851e+004	BIC 4.054e+004
MAPE 0.02865	RMSE 3.786e+004
MAD 2.647e+004	

Com este valor de α, todo o peso concentrado na última observação.

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Valores ajustados e previsões



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Previsões até 2015

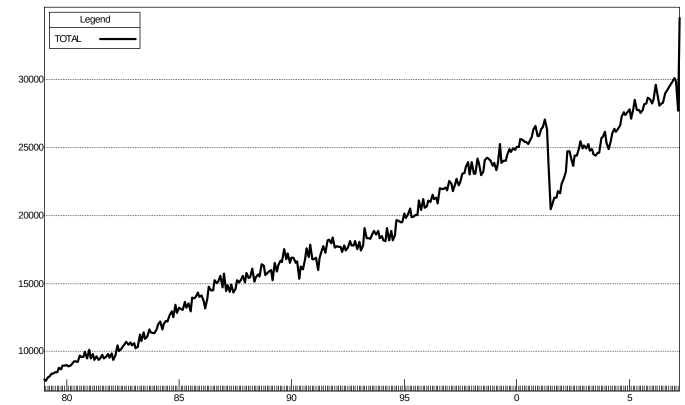
Date	2.5 Lower	Forecast	97.5 Upper
2007	2,199,020	2,380,018	2,561,016
2008	2,160,619	2,437,218	2,713,817
2009	2,147,642	2,494,418	2,841,194
2010	2,146,648	2,551,618	2,956,587
2011	2,153,025	2,608,818	3,064,611
2012	2,164,526	2,666,017	3,167,509
2013	2,179,857	2,723,217	3,266,578
2014	2,198,191	2,780,417	3,362,643
2015	2,218,962	2,837,617	3,456,272

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Exemplo – Série Sazonal**
- **Consumo total de energia elétrica – Brasil (GWh), janeiro de 1979 a abril de 2007.**
- **Fonte: Banco Central (a partir de dados da Eletrobrás).**
- **Produza previsões usando amortecimento exponencial para os anos 2007-2008 usando o Forecast Pro e interprete os resultados gerados.**

AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Gráfico da Série**



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Modelo Holt-Winters ajustado automaticamente usando toda a série**

Forecast Model for total
Multiplicative Winters: Linear trend, Multiplicative seasonality
Confidence limits proportional to indexes and level

Component	Smoothing Weight	Final Value
Level	0.64243	32243.
Trend	0.00346	68.993
Seasonal	0.09153	

Seasonal Indexes

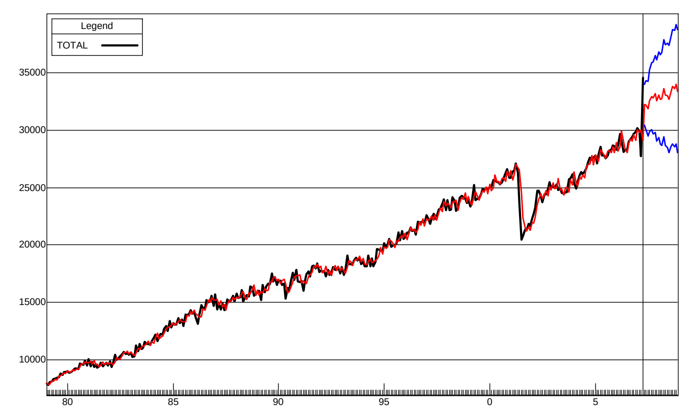
January - March	1.00565	0.99213	0.99107
April - June	1.01700	0.99705	0.99392
July - September	0.98228	1.00100	1.01062
October - December	1.00382	1.01319	0.99286

Within-Sample Statistics

Sample size 340	Number of parameters 3
Mean 1.871e+004	Standard deviation 6141
R-square 0.9909	Adjusted R-square 0.9908
Durbin-Watson 1.734	Ljung-Box(18)=21.81 P=0.7596
Forecast error 588.4	BIC 601
MAPE 0.01904	RMSE 585.8
MAD 352.8	

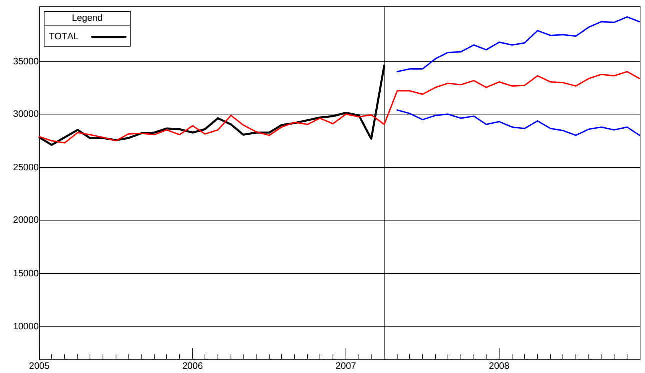
AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- **Valores ajustados e previsões**



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- "Zoom" nos valores ajustados e previsões



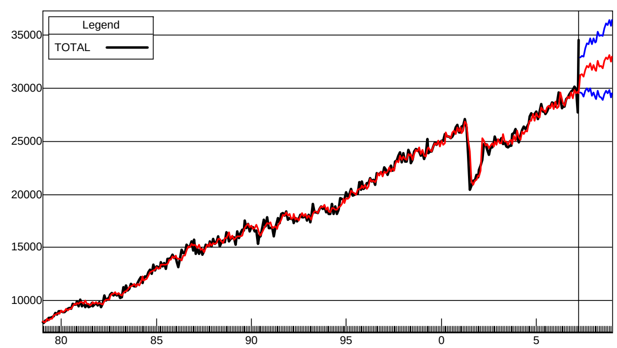
AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- Previsões até 2008

Date	2.5 Lower	Forecast	97.5 Upper
2007-05	30,433	32,216	34,000
2007-06	30,066	32,184	34,301
2007-07	29,482	31,874	34,267
2007-08	29,882	32,551	35,220
2007-09	30,015	32,934	35,853
2007-10	29,645	32,781	35,917
2007-11	29,805	33,157	36,509
2007-12	29,029	32,560	36,092
2008-01	29,326	33,049	36,772
2008-02	28,785	32,673	36,562
2008-03	28,654	32,707	36,759
2008-04	29,402	33,633	37,863
2008-05	28,666	33,042	37,417
2008-06	28,485	33,007	37,528
2008-07	28,031	32,688	37,344
2008-08	28,575	33,380	38,185
2008-09	28,822	33,770	38,718
2008-10	28,533	33,612	38,692
2008-11	28,781	33,996	39,211
2008-12	28,050	33,382	38,715

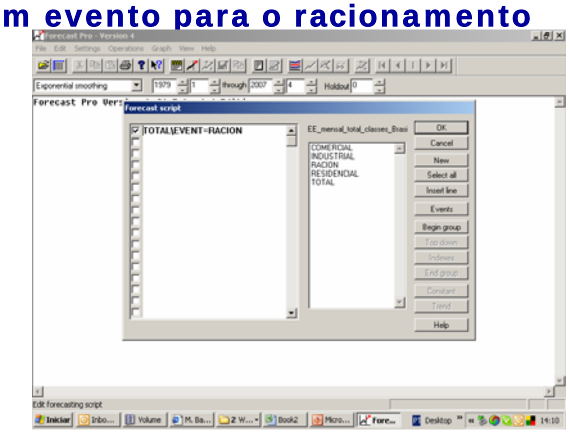
AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- Valores ajustados e previsões



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

- Modelo Holt-Winters ajustado automaticamente usando toda a série e com evento para o racionamento



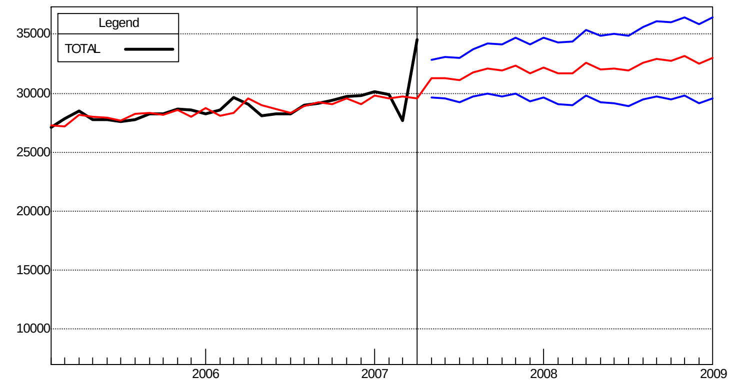
AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Resultados

```
Forecast Model for total
Multiplicative Winters: Linear trend, Multiplicative seasonality
Multiplicative adjustment for events in RACION
Confidence limits proportional to indexes and level

                          Smoothing     Final
Component                 Weight        Value
----------------------------------------------------
Level                     0.41831       31358.
Trend                     0.00223       66.930
Seasonal                  0.02928
Events                    0.65794

Seasonal Indexes
--------------------------------------------------------------
January - March           1.00646   0.98977   0.98678
April - June              1.01220   0.99449   0.99374
July - September          0.98564   1.00379   1.01259
October - December        1.00550   1.01577   0.99389

Event code                Index
----------------------------------------------------------------------------
1                         0.88372

Within-Sample Statistics
----------------------------------------------------------
Sample size 340           Number of parameters 4
Mean 1.871e+004             Standard deviation 6141
R-square 0.9925            Adjusted R-square 0.9924
Durbin-Watson 1.815          Ljung-Box(18)=18.07 P=0.5492
Forecast error 535.2        BIC 550.6
MAPE 0.0176               RMSE 532
MAD 326.5
```


AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ “Zoom” nos valores ajustados e previsões



AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

❑ Previsões até 2008

Date	2.5 Lower	Forecast	97.5 Upper
2007-05	29,639	31,252	32,864
2007-06	29,548	31,295	33,042
2007-07	29,244	31,106	32,967
2007-08	29,743	31,745	33,748
2007-09	29,965	32,092	34,218
2007-10	29,707	31,934	34,161
2007-11	29,987	32,329	34,670
2007-12	29,282	31,699	34,116
2008-01	29,644	32,167	34,690
2008-02	29,103	31,700	34,297
2008-03	28,990	31,670	34,350
2008-04	29,767	32,554	35,340
2008-05	29,196	32,050	34,904
2008-06	29,161	32,093	35,025
2008-07	28,895	31,897	34,899
2008-08	29,460	32,552	35,643
2008-09	29,732	32,905	36,078
2008-10	29,501	32,742	35,983
2008-11	29,824	33,144	36,465
2008-12	29,122	32,497	35,871