Soluções - Capítulo 4

Problema 1

Seja X ~ Uniforme(-a, a) onde a > 0. Encontre a densidade de Y = X^2 e calcule E(Y) e VAR(Y).

Solução

Use o método da função de distribuição porque a transformação Y = X^2 não é uma função injetora quando X $\in$ (-a, a).

A densidade de Y é: g(y) = $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left\{f\left(\sqrt{y}\right)+f\left(-\sqrt{y}\right)\right\}$ onde f(.) é a densidade de X.

Neste caso $f(x)=\dfrac{1}{2a}$ se $-a<x<a$ e a densidade de Y torna-se:

g(y) = $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left\{\dfrac{2}{2a}\right\}=\dfrac{1}{2a\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2a}y^{-1/2}$ se $0 < \mathrm{y} < \mathrm{a}^2$

A média de Y é:

$$E(Y)=\int_0^{a^2} y\left[\frac{1}{2a}y^{-1/2}\right]dy=\frac{1}{2a}\int_0^{a^2} y^{1/2}dy=\frac{1}{2a}\left\{\frac{y^{3/2}}{3/2}\right\}\Bigg|_0^{a^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{2}{3}a^3\right\}=\frac{a^2}{3}$$

O segundo momento é:

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^{a^2} y^2\left[\frac{1}{2a}y^{-1/2}\right]dy=\frac{1}{2a}\int_0^{a^2} y^{3/2}dy=\frac{1}{2a}\left\{\frac{y^{5/2}}{5/2}\right\}\Bigg|_0^{a^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{2}{5}a^5\right\}=\frac{a^4}{5}$$

A variância de Y é então:

VAR(Y) = E(Y^2) - $\{E(Y)\}^2$ = $\dfrac{a^4}{5}-\left\{\dfrac{a^2}{3}\right\}^2=\dfrac{a^4}{5}-\dfrac{a^4}{9}=\dfrac{4a^4}{45}$

Problema 2

Considere a densidade f(x) = 2(1-x) para $0 \le x \le a$. Encontre o valor apropriado da constante <u>a</u>.

Solução

A densidade deve integrar a 1 no intervalo dado. Assim:

$$\int_0^a 2(1-x)dx=\left\{2x-x^2\right\}\Bigg|_0^a=\left(2a-a^2\right)=1\Rightarrow a^2-2a+1=0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2=0\Rightarrow a=1$$

Problema 3

Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade:

f(x) = $q.p^{x-1}$, x = 1, 2, 3, ... e q = 1-p onde 0< p <1.

a) Calcule a função geradora de momentos de X.

b) A partir da função geradora de momentos, encontre a média e variância de X.

Solução

A função geradora de momentos é, por definição:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q.p^{x-1} = \frac{q}{p}\sum_{x=1}^{\infty}\left(pe^t\right)^x = \frac{q}{p}\left\{\frac{pe^t}{1-pe^t}\right\}$$

Esta série converge sempre que $|pe^t| < 1$, isto é, se $e^t < 1/p \Leftrightarrow t < -\log(p)$

A primeira derivada da função geradora de momentos é:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{q}{p}\frac{d}{dt}\left\{\frac{pe^t}{1-pe^t}\right\} = \frac{q}{p}\left\{\frac{pe^t\left(1-pe^t\right)-\left(-pe^t\right)\left(pe^t\right)}{\left(1-pe^t\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{q}{p}\left\{\frac{pe^t}{\left(1-pe^t\right)^2}\right\} = M(t)\left\{\frac{1}{1-pe^t}\right\}$$

A média de X é a primeira derivada da função geradora de momentos avaliada em t = 0, isto é:

$$E(X) = M(0)\left\{\frac{1}{1-p}\right\} = \frac{1}{q}$$ pois M(0) = 1 sempre.

A segunda derivada da função geradora de momentos é:

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dM(t)}{dt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{M(t)\left\{\frac{1}{1-pe^t}\right\}\right\} =$$

$$= \frac{dM(t)}{dt}\left\{\frac{1}{1-pe^t}\right\} + M(t)\left\{\frac{1}{1-pe^t}\right\}^2(-1)\left(-pe^t\right)$$

O segundo momento é esta função avaliada em t = 0:

$$E\left(X^2\right) = \left.\frac{d^2M(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left\{\frac{1}{1-p}\right\}\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} + M(0)\left\{\frac{1}{1-p}\right\}^2(-1)(-p) =$$

$$= \frac{1}{q}\left\{\frac{1}{q}\right\} + 1\left\{\frac{1}{q}\right\}^2(p) = \frac{1}{q^2}\{1+p\}$$

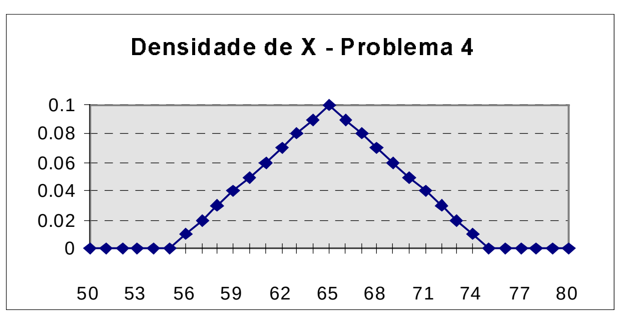
A variância de X é:

VAR(X) = $E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{1+p}{q^2} - \dfrac{1}{q^2} = \dfrac{p}{q^2}$

Problema 4

A temperatura média diária (em graus Fahrenheit) numa certa estação meteorológica nos EUA é uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-55}{100} & \text{se } 55 \le x \le 65 \\ \dfrac{75-x}{100} & \text{se } 65 < x \le 75 \end{cases}$$



Para satisfazer uma nova legislação, a estação deve começar a trabalhar com a temperatura em graus centígrados. Seja Y a variável aleatória que representa a temperatura média diária em graus centígrados. Então, a relação entre X e Y é:

Y = 5(X - 32)/9 $\Leftrightarrow$ X = (9Y)/5 + 32.

a) Ache a densidade de Y e faça o seu gráfico.

b) Faça o gráfico da função de distribuição de Y.

Solução

A densidade de Y pode ser obtida pelo método da função de distribuição usando-se a densidade de X.

Note que a densidade de X é:

F(x) = Pr(X ≤ x) = $\begin{cases} 0 \quad \text{se } x < 55 \\ \int_{55}^{x} \frac{u-55}{100} du = \frac{1}{200}\{x-55\}^2 \quad \text{se } x \in [55,65] \\ \frac{1}{2} + \int_{65}^{x} \frac{75-u}{100} du = \frac{1}{2} + \frac{-1}{200}\left(x^2 - 150x + 5525\right) \text{ se } x \in (65,75] \end{cases}$

e F(x) = 1 se x ≥ 75.

Sejam g(y) e G(y) a densidade e função de distribuição de Y, respectivamente. Então:

G(y) = Pr(Y ≤ y) = $\Pr\left\{\frac{5(X-32)}{9} \le y\right\} = \Pr\{5X - 160 \le 9y\} = \Pr\left\{X \le \frac{9y}{5} + 32\right\}$

Alguns valores importantes de X e Y são:

x = 55 $\Rightarrow$ y = 115/9 $\approx$ 12.78

x = 65 $\Rightarrow$ y = 165/9 $\approx$ 18.33

x = 75 $\Rightarrow$ y = 215/9 $\approx$ 23.89

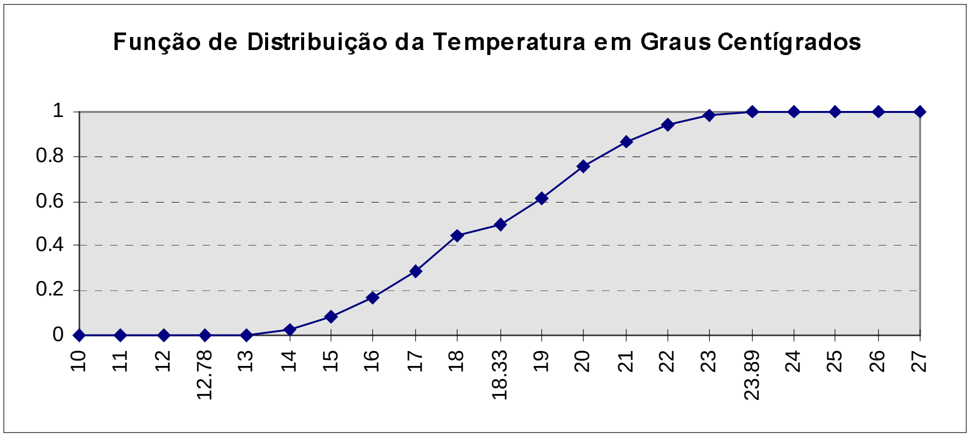
Substituindo os diversos valores da função de distribuição de X leva a:

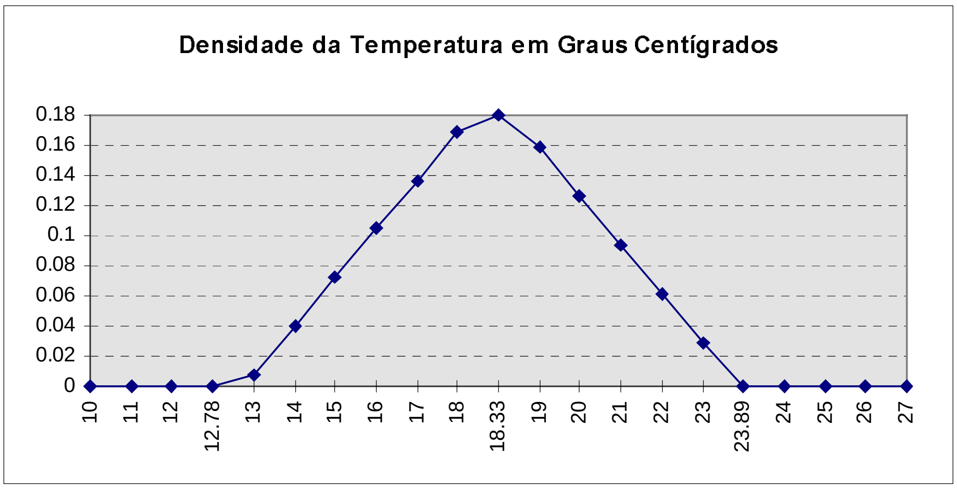
$$G(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad y \le 12.78 \\ 1 \quad \text{se} \quad y > 23.89 \\ \frac{1}{200}\left\{\frac{9y-115}{5}\right\}^2 \quad \text{se } y \in (12.78,\ 18.33) \\ \frac{-81y^2}{5000} + \frac{387y}{500} - \frac{1649}{200} \quad \text{se } y \in [18.33,\ 23.89] \end{cases}$$

A densidade de Y é encontrada por diferenciação.

$$g(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{se } y \notin (12.78,\ 23.89) \\ \frac{9}{500}\left\{\frac{9y-115}{5}\right\} \quad \text{se } y \in (12.78,\ 18.33) \\ \frac{387}{500} - \frac{162y}{5000} \quad \text{se } y \in [18.33,\ 23.89] \end{cases}$$

Os gráficos da densidade e função de distribuição de Y são apresentados a seguir.





Problema 5

Seja X uma variável aleatória variável contínua com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{4} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{3-x}{4} & \text{se } 1 \le \text{x} \le 3 \end{cases}$$

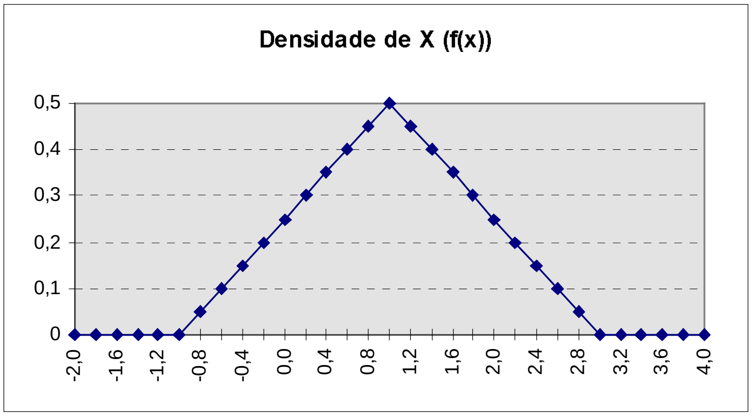
a) Faça o gráfico da função de distribuição de X.

b) Encontre a função de distribuição de Y = |X|.

c) Ache a densidade de Y = |X|.

Solução

O gráfico da densidade é mostrado a seguir.



A função de distribuição de X é:

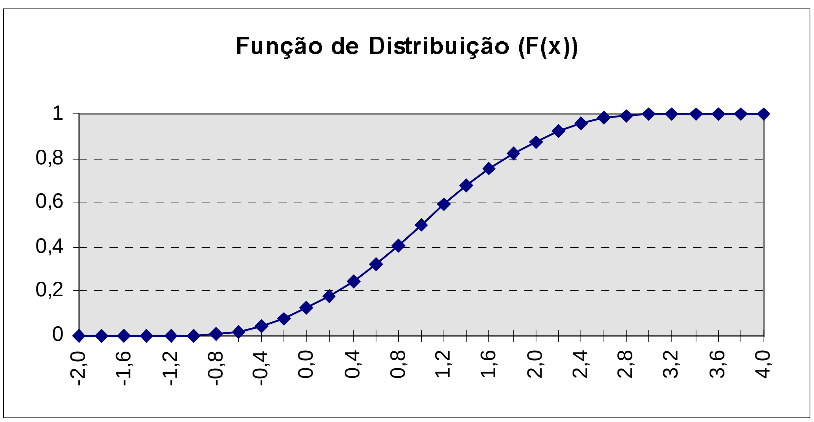
F(x) = Pr(X ≤ x) = 0 se x < -1

F(x) = 1 se x > 3 e

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{u+1}{4}du=\frac{1}{4}\left\{\frac{u^2}{2}+u\right\}\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}+1\right\}=\frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8}(x+1)^2 \quad \text{se } -1\le x\le 1$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\int_{1}^{x}\frac{3-u}{4}du=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left\{3u-\frac{u^2}{2}\right\}\Big|_{1}^{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left\{3x-\frac{x^2}{2}-3+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8}\left\{6x-x^2-5+4\right\}=\frac{1}{8}\left\{6x-x^2-1\right\} \text{ se } 1\le x\le 3$$

O gráfico desta função de distribuição está a seguir.



Note que os valores possíveis de Y estão entre 0 e +∞. Também, a função de distribuição de Y = |X| é dada por:

G(y) = Pr{ Y ≤ y} = Pr{ |X| ≤ y} = Pr{-y ≤ X ≤ y} = F(y) - F(-y)

a) Se y ≤ 1 então:

F(y) e F(-y) são ambos diferentes de zero e menores que 1;

$$G(y)=\frac{1}{8}(y+1)^2-\frac{1}{8}(-y+1)^2=\frac{1}{8}\left(y^2+2y+1-1+2y-y^2\right)=\frac{y}{2}$$

b) Se y ∈ (1, 3) então:

F(y) > 0 mas F(-y) = 0

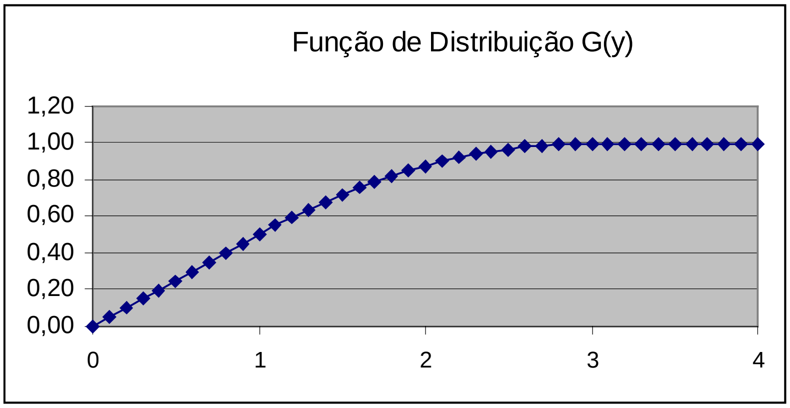
$$G(y)=\frac{1}{8}\left(6y-y^2-1\right)^2$$

c) Se y ≥ 3 então:

F(y) = 1 e F(-y) = 0 e então G(y) = Pr{ Y ≤ y} = Pr{ |X| ≤ y} = Pr{-y ≤ X ≤ y} =

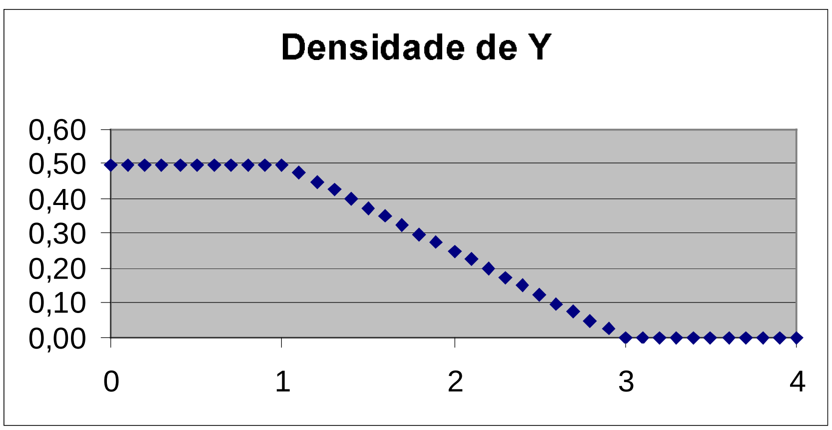
= F(y) - F(-y) = 1

O gráfico desta função de distribuição é apresentado a seguir:



A densidade de Y é obtida derivando-se a função de distribuição. Na verdade:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{8}(6-2y) & \text{se } 1 < y \le 3 \\ 0 & \text{se } y \notin [0,3] \end{cases}$$



Problema 6

Uma empresa aérea precisa revisar os motores de seus aviões em intervalos regulares de tempo. Existem 2 opções - a revisão rápida e uma revisão mais detalhada e cara. O técnico encarregado da manutenção garante que na revisão rápida o funcionamento perfeito dos motores é uma variável Exponencial com média 200 horas. Após a revisão detalhada o funcionamento perfeito dos motores é uma variável Exponencial com média 600 horas.

A revisão detalhada custa R$ 10.000,00 e a revisão rápida R$ 4.000,00. O avião precisa funcionar por 500 horas sem problemas de motor para que a operação da companhia seja economicamente viável. Do contrário, se o avião apresentar defeito antes das 500 horas, existe um custo adicional de R$ 20.000,00 devido ao tempo necessário para uma nova manutenção.

Qual o custo esperado das revisões? Qual procedimento é mais vantajoso?

Solução

Dica Teórica

Se X tem densidade Exponencial com média β então a densidade tem a forma:

$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ onde $x \geq 0$ e $\beta > 0$ e a função de distribuição associada a esta densidade é $F(x) = Pr(X \leq x) = 1 - \exp(-x/\beta)$.

Vamos estudar cada um dos procedimentos separadamente. O procedimento **mais vantajoso** é o que apresenta o **menor custo esperado**.

Seja X o tempo de funcionamento sem problemas do motor após uma revisão. X é uma variável Exponencial cuja média depende de qual procedimento de revisão foi adotado.

No caso da revisão detalhada, o custo de manutenção é:

$$C = \begin{cases} 10000 \text{ se X} > 500 \\ 10000 + 20000 \text{ se X} \leq 500 \end{cases}$$

E X tem distribuição Exponencial com média 600 horas, e então Pr(X > 500) = 1 – F(500) = exp(-500/600) = exp(-5/6) = 0.4346. Daí, Pr(X ≤ 500) = F(500) = 1 – 0.4346 = 0.5654.

Então, o custo da **revisão detalhada** é:

$$C = \begin{cases} 10000 \text{ com probabilidade } 0.4346 \\ 30000 \text{ com probabilidade } 0.5654 \end{cases}$$

O custo esperado usando a revisão detalhada é:

E(C) = 10000(0.4346) + 30000(0.5654) = **21308**

No caso da **revisão rápida**:

$$C = \begin{cases} 4000 \text{ se X} > 500 \\ 4000 + 20000 \text{ se X} \leq 500 \end{cases}$$

Mas agora X tem distribuição Exponencial com média 200 horas, e assim:

Pr(X > 500) = 1 – F(500) = exp(-500/200) = exp(-5/2) = 0.0821. Daí, Pr(X ≤ 500) = F(500) = 1 – 0.0821 = 0.9179.

O custo esperado sob a revisão rápida é:

E(C) = 4000(0.0821) + 24000(0.9179) = **22358**

Logo a revisão detalhada é mais vantajosa pois tem o menor custo esperado.

Problema 7

A velocidade de uma molécula de gás é uma variável aleatória contínua V com densidade dada por: $f(v) = av^2 e^{-bv^2}$ onde b é uma constante que depende do gás, v > 0 e a > 0 é uma constante determinada a partir do fato de f(v) integrar a 1 no intervalo (0, +∞).

Seja Z a energia cinética da molécula de gás, dada por: $Z = \dfrac{mV^2}{2}$.

Encontre a densidade de Z.

Solução

Podemos aplicar o método do Jacobiano, pois a função que relaciona V e Z é inversível (já que V > 0 sempre).

A função inversa é:

$$v = \sqrt{\frac{2z}{m}} \Rightarrow \frac{dv}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{m}\right)^{-1/2} \frac{2}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{2z}}$$

A densidade de Z é então:

$$g(z) = a\left(\frac{2z}{m}\right)\exp\left\{-b\left(\frac{2z}{m}\right)\right\}\left(\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{2z}}\right) = \frac{a}{m}\sqrt{\frac{2z}{m}}\exp\left\{-b\left(\frac{2z}{m}\right)\right\}$$

onde z > 0.

Problema 8

O preço de uma ação num certo dia é uma variável aleatória **contínua** X com densidade de probabilidade dada a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{225} - \dfrac{120}{225} & \text{se } x \in [120,135] \\ \dfrac{-x}{225} + \dfrac{150}{225} & \text{se } x \in [135,150] \\ 0 & \text{se } x \notin [120,150] \end{cases}$$

a) Faça um gráfico desta densidade.

b) Calcule a média, a variância e o desvio padrão dos preços.

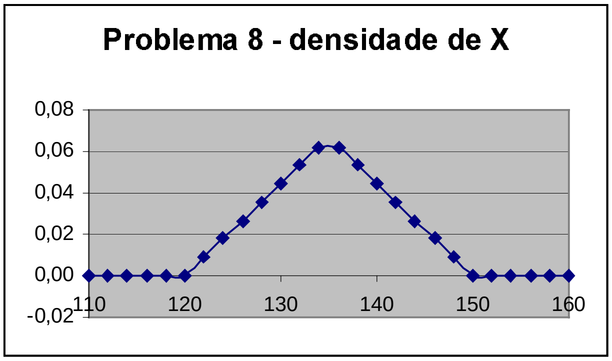
c) Considere a seguinte função C(X), onde X indica o preço (C(X) é também uma variável aleatória):

$$C(X) = \begin{cases} -5 & \text{se } x \le 140 \\ X - 145 & \text{se } x > 140 \end{cases}$$

Calcule a média de C(X).

Solução

a) O gráfico da densidade de X é:



b) O preço médio é, por definição:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx=\int_{120}^{135} x.f(x)dx+\int_{135}^{150} x.f(x)dx=$$

$$=\int_{120}^{135} x.\left\{\frac{x-120}{225}\right\}dx+\int_{135}^{150} x.\left\{\frac{150-x}{225}\right\}dx=\frac{1}{225}\left\{\frac{x^3}{3}-\frac{120x^2}{2}\right\}\Bigg|_{120}^{135}+\frac{1}{225}\left\{\frac{150x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right\}\Bigg|_{135}^{150}=$$

$$=65+70=135$$

O segundo momento de X é, por definição:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx=\int_{120}^{135} x^2.f(x)dx+\int_{135}^{150} x^2.f(x)dx=$$

$$=\int_{120}^{135} x^2.\left\{\frac{x-120}{225}\right\}dx+\int_{135}^{150} x^2.\left\{\frac{150-x}{225}\right\}dx=\frac{1}{225}\left\{\frac{x^4}{4}-\frac{120x^3}{3}\right\}\Bigg|_{120}^{135}+\frac{1}{225}\left\{\frac{150x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right\}\Bigg|_{135}^{150}=$$

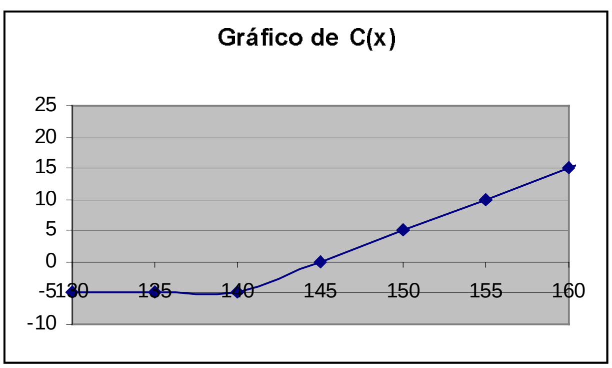
$$=8456.25+9806.25=18262.50$$

Logo, a variância é:

VAR(X) = E(X^2) – {E(X)}^{2} = 18262.50 –$(135)^2$ = 37.5

E o desvio padrão é: $\sqrt{37.5}=6.124$

A função C(X) é:



A média de C(X) pode ser encontrada sem recorrermos ao cálculo direto de sua densidade, basta apenas usar a densidade de X de maneira apropriada. Lembre-se que, em geral, o valor esperado de qualquer função de X pode ser escrito como:

$$E(C(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x).f(x)dx$$

Neste caso precisamos separar a integral em 3 intervalos, correspondendo às diversas regiões de definição de C(x) e f(x), e então:

$$E(C(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x).f(x)dx = \int_{120}^{135} C(x).f(x)dx + \int_{135}^{140} C(x).f(x)dx + \int_{140}^{150} C(x).f(x)dx$$

A primeira integral é:

$$\int_{120}^{135} C(x).f(x)dx = \int_{120}^{135} (-5).\left(\frac{x-120}{225}\right)dx = \frac{-5}{225}\left(\frac{x^2}{2} - 120x\right)\Bigg|_{120}^{135} = 157.5 - 160 = -2.5$$

Analogamente

$$\int_{135}^{140} C(x).f(x)dx = \int_{135}^{140} (-5).\left(\frac{150-x}{225}\right)dx = \frac{-5}{225}\left(150x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{135}^{140} =$$

Problema 9

Um número é escolhido aleatoriamente no intervalo (0,1). Seja X a variável aleatória resultante. Encontre a densidade e a função de distribuição da variável Y = 1/X.

Solução

A função Y = 1/X é inversível para X no intervalo (0,1). Note que, quando x tende a zero, y tende a +∞ e quando x tende a 1, y tende a 1 também.

$y = 1/x \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-1}{y^2} < 0$ e portanto o módulo do Jacobiano da transformação é $\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = \dfrac{+1}{y^2}$

A densidade de X é: f(x) = 1 se x $\in$ (0,1) e zero fora deste intervalo.

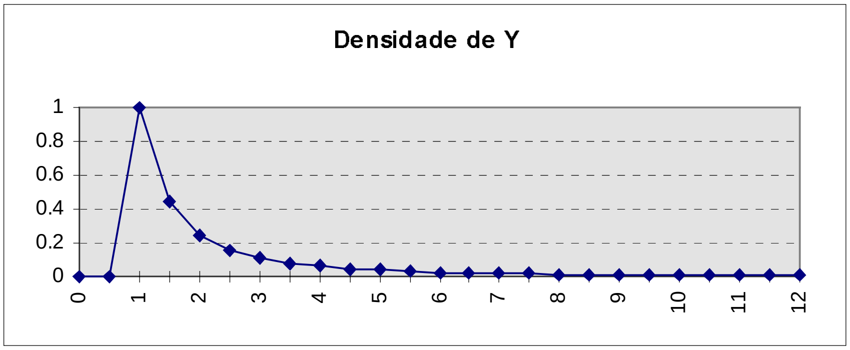
Assim, a densidade de Y é:

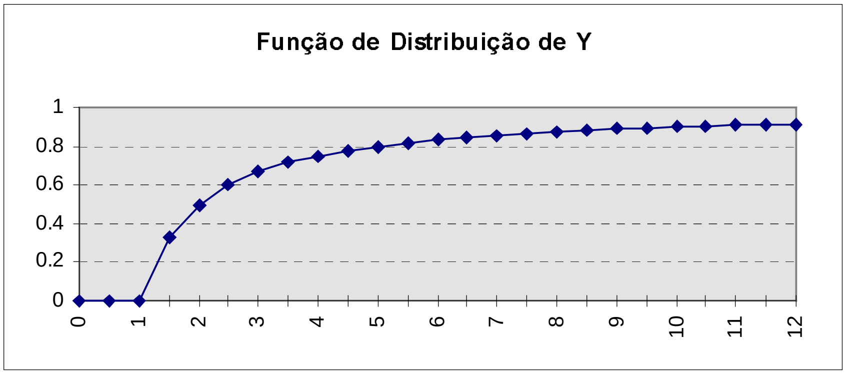
$$g(y) = \frac{1}{y^2} \text{ se } y > 1 \text{ e } g(y) = \text{ zero fora deste intervalo}$$

A função de distribuição de Y é:

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ \displaystyle\int_1^y \frac{1}{u^2}du = 1 - \frac{1}{y} & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

Os gráficos destas funções estão a seguir.





Problema 10

O preço de um ativo financeiro é uma variável aleatória contínua com densidade

$f(x) = 2xe^{-x^2}$ onde $x \geq 0$. Encontre a densidade de $Y = X^2$.

Solução

Como $x \geq 0$ por hipótese, a função $y = x^2$ é inversível e $x = \sqrt{y}$.

Logo, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ e a densidade de Y torna-se:

$$g(y) = 2\sqrt{y}\left(e^{-y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = e^{-y} \quad \text{onde } y \geq 0$$

Ou seja, Y tem densidade Exponencial com média 1.

Problema 11

Seja X uma variável aleatória com densidade Expo(1). Encontre a densidade da variável:

$$Y = \frac{2}{(1+X)^2}$$

E faça um gráfico desta densidade.

Solução

Note que $x \geq 0$ e então quando x tende a zero, y tende a 2 e quando x tende a $+\infty$, y tende a zero. Logo, a variável Y está definida no intervalo (0,2).

Também, a função que relaciona x e y é injetora e assim podemos usar o método do Jacobiano. Temos:

$(1 + x)^2 = 2/y \Leftrightarrow 1 + x = \sqrt{\dfrac{2}{y}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{2}{y}} - 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{2}\right)(y)^{-3/2}$

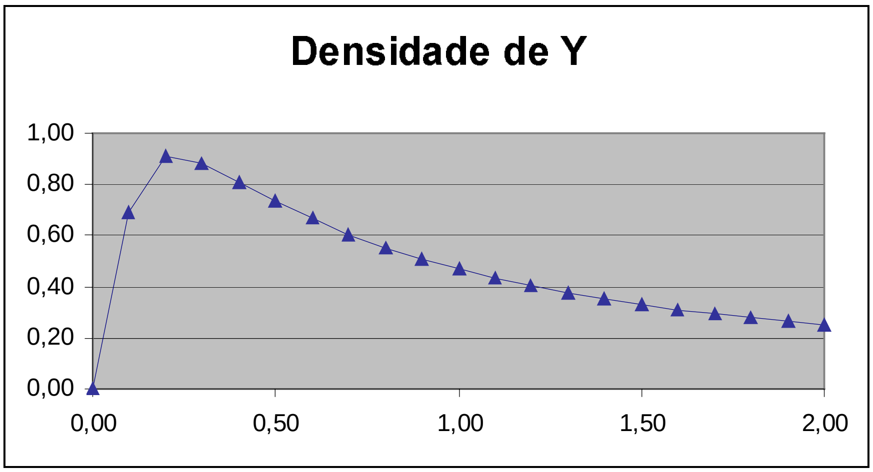
O módulo do Jacobiano da transformação é:

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{+1}{\sqrt{2}}\right)(y)^{-3/2}$$

A densidade de Y é então:

$g(y) = \exp\left\{-\left(\sqrt{\dfrac{2}{y}} - 1\right)\right\}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y)^{-3/2}$ para $0 < y < 2$

O gráfico desta densidade é:



Problema 12

A duração (Y) de componentes eletrônicos é às vezes modelada pela densidade Rayleigh, mostrada a seguir.

$$f(y) = \left(\frac{2y}{\theta}\right)\exp\left\{\frac{-y^2}{\theta}\right\} \quad \text{para } y > 0$$

a) Encontre a densidade de $U = Y^2$.

b) Use o resultado do ítem a) para achar a média e a variância de U.

Solução

A solução é completamente análoga à exibida no problema 10. O termo do Jacobiano da transformação é:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

A densidade de U é:

$$g(u) = \frac{2\sqrt{u}}{\theta}\exp\left\{\frac{-u}{\theta}\right\}\left\{\frac{1}{2\sqrt{u}}\right\} = \frac{1}{\theta}\exp\left\{\frac{-u}{\theta}\right\} \quad \text{onde } u > 0$$

Ou seja, U tem densidade Exponencial com média θ e variância θ^2.

Problema 13

Seja X uma variável aleatória com densidade Exponencial com média 1. Seja: $Y = \sqrt{X^2 + 4}$. Calcule a média e variância aproximadas de Y.

Solução

A densidade de X é: f(x) = exp(-1).

Também, E(X) = μ = 1 e VAR(X) = 1.

Pelos resultados do livro, a média e variância aproximadas de Y = h(X) = $\sqrt{X^2 + 4}$ são:

$$E(Y) = E(h(X)) \approx h(\mu) + \frac{h''(\mu)}{2}.VAR(X) = h(\mu) + \frac{h''(\mu)}{2}.\sigma^2$$

e

$$VAR(Y) = VAR(h(X)) \approx VAR[h(\mu) + h'(\mu).(X-\mu)] =$$
$$= VAR[h'(\mu).(X-\mu)] = (h'(\mu))^2.VAR[X-\mu] =$$
$$= (h'(\mu))^2.VAR(X) = (h'(\mu))^2.\sigma^2$$

Neste caso:

$$h'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X^2+4}}(2X) = \frac{X}{\sqrt{X^2+4}}$$

$$h''(X) = \frac{(1)\sqrt{X^2+4} - \left(\frac{1}{2\sqrt{X^2+4}}\right)(2X)(X)}{\left(\sqrt{X^2+4}\right)^2} = \frac{2(X^2+4) - 2X^2}{2(X^2+4)^{3/2}} = \frac{4}{(X^2+4)^{3/2}}$$

E como a média de X é μ = 1 segue que:

h(μ) = $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ e suas duas primeiras derivadas avaliadas em μ são: $h'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $h''(\mu) = \frac{4}{5\sqrt{5}}$

Por substituição temos:

$$E(Y) = E(h(X)) \approx h(\mu) + \frac{h''(\mu)}{2}.\sigma^2 = \sqrt{5} + \frac{4}{5\sqrt{5}}(1) = 2.594$$

$$VAR(Y) = VAR(h(X)) \approx (h'(\mu))^2.VAR(X) = (h'(\mu))^2.\sigma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2(1) = \frac{1}{5}$$

Problema 14

A proporção de impurezas em certas amostras de ferro é uma variável aleatória com densidade:

$$f(y) = \frac{3y^2}{2} + y \quad \text{onde } 0 \le y \le 1$$

O valor em dólares destas amostras é uma função da proporção de impurezas, a saber, V = 5 - (Y/2). Encontre a densidade de V.

Solução

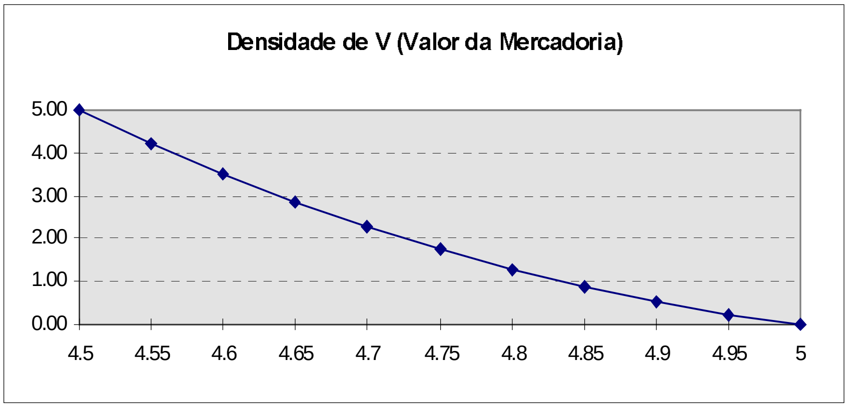
$$v = 5 - \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 5 - v \Rightarrow y = 10 - 2v \Rightarrow \frac{dy}{dv} = -2$$

Se y $\to$0, v $\to$ 5 e se y $\to$ 1, v $\to$ 4.5. Logo, a densidade de V é:

$$g(v) = \left\{\frac{3}{2}(10-2v)^2 + (10-2v)\right\}|-2| = 2\left\{\frac{3}{2}\left(100-40v+4v^2\right)+(10-2v)\right\} =$$

$$= 300 - 120v + 12v^2 + 20 - 4v = 320 - 124v + 12v^2 \quad \text{onde } 4.5 \leq v \leq 5$$

O gráfico da densidade está a seguir.



Problema 15

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f(x) = exp(-x) para x > 0. Encontre a densidade de:

a) Y = 2/X

b) $Z = 3/(X + 1)^2$

Solução

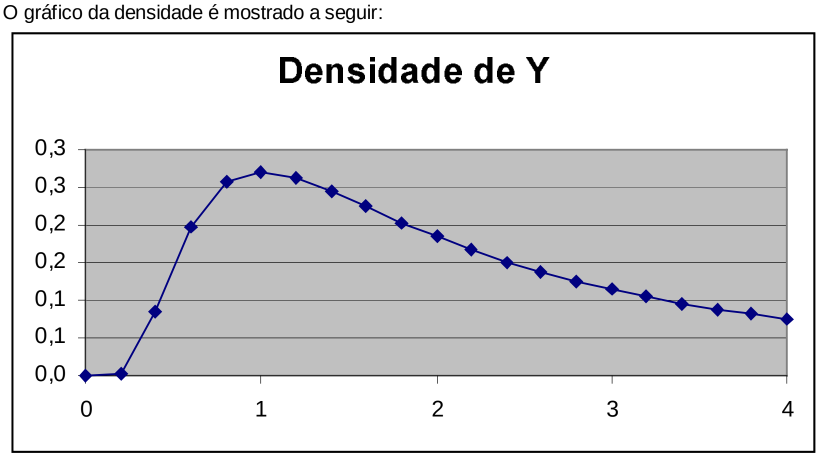
Em ambos os casos a) e b) podemos usar o método do Jacobiano pois as funções são injetoras para x > 0.

a) y = 2/x ⇔ x = 2/y ⇔ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-2}{y^2}$ e a variável Y está definida no intervalo (0, +∞).

A densidade de Y é:

$$g(y) = \exp\left\{\frac{-2}{y}\right\}.\left(\frac{+2}{y^2}\right) = \frac{2}{y^2}\exp\left\{\frac{-2}{y}\right\} \quad \text{onde } y > 0$$

O gráfico da densidade é mostrado a seguir:



b) Z = 3/(X + 1)^2 ⇔ (x+1)^2 = 3/z ⇔ $x = \sqrt{\frac{3}{z}} - 1 = \left(\sqrt{3}\right)(z)^{-1/2} - 1$ e então:

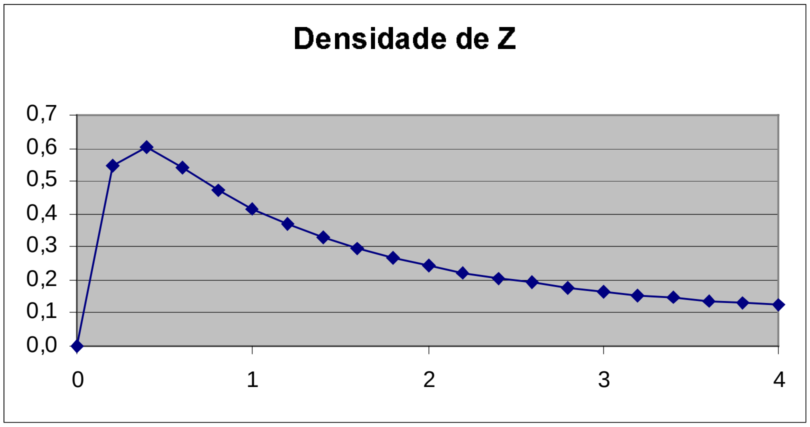
$\frac{dx}{dz} = \left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(z^{-3/2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{z^3}}$ e quando x tende a zero, z tende a 3, e se x tende a +∞, z tende a zero.

Logo, a variável Z está definida no intervalo (0, +∞).

A densidade de Z é:

$$g(z) = \left(\frac{+\sqrt{3}}{2\sqrt{z^3}}\right)\exp\left\{-\sqrt{\frac{3}{z}} + 1\right\} \text{onde } z > 0$$

O gráfico desta densidade é:



Problema 16

A resistência de um resistor é uma variável aleatória R com densidade dada por:

$f(r) = a^2 r e^{-ar}$, $r > 0$. Suponha que a voltagem no circuito é constante e igual a v. Encontre a densidade da corrente I = v/R que passa pelo circuito.

Solução

I = v/R ⇔ R = v/I ⇔ $\frac{dr}{di} = \frac{v(-1)}{i^2}$

Note que I ≥ 0 sempre, e sua densidade é:

$$g(i) = a^2\left(\frac{v}{i}\right)e^{-a\frac{v}{i}}\left|\frac{-v}{i^2}\right| = \frac{a^2v^2}{i^2}e^{-\frac{av}{i}} \quad \text{onde } i \geq 0$$

Problema 17

Seja X uma variável aleatória contínua definida no intervalo (0,1) tal que:

Pr(X < 0.3) = 75%. Seja Y = 1-X. Encontre o número k tal que Pr(Y < k) = 25%.

Solução

Basta usar a equivalência dos eventos Y < k e 1 - X < k.

Note que Y < k acontece se, e somente se, 1 - X < k, ou seja, se -X < k -1, isto é, X > 1 - k.

Logo, Pr(Y < k) = Pr(X > 1 - k) = 1 - Pr(X ≤ 1- k)

Sabemos que, se 1-k = 0.3 ⇒ k = 0.7 temos Pr(X ≤ 1- k) = 75%.

Assim Pr(Y < 0.7) = Pr(X > 0.3) = 1 - Pr(X ≤ 0.3) = 1 - 75% = 25% e o número desejado é k = 0.7.

Problema 18

(Atenção – EU SUSPEITO QUE A SOLUÇÃO DESTE PROBLEMA ESTEJA ERRADA, AGRADEÇO SE ALGUÉM PUDER ME AJUDAR A IDENTIFICAR O ERRO!!!!!!)

Seja X uma variável com densidade Uniforme no intervalo (-1, +1). Encontre as densidades das seguintes variáveis aleatórias:

a) Y = cos(πX/2)

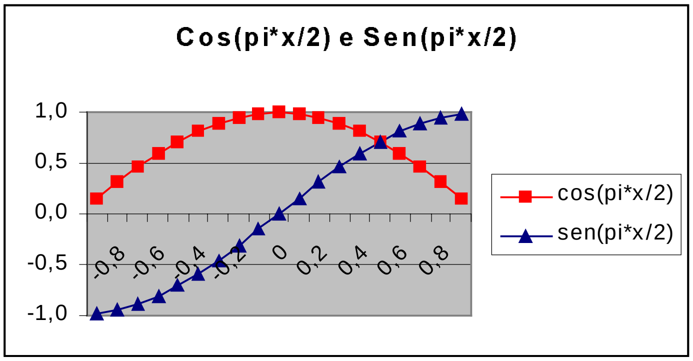
b) Y = sen(πX/2)

c) W = sen((πX/k)) onde k é um inteiro positivo maior que 1.

d) U = |X|

Solução

A seguir estão os gráficos das funções dos ítens a) e b).



Note que Y = cos(πX/2) ***não é*** uma função injetora no intervalo (-1, 1), e portanto ***não*** podemos usar o método do Jacobiano para achar a densidade da variável transformada Y. Ao contrário, Y = sen(πX/2) é injetora neste mesmo intervalo, e assim o método do Jacobiano pode ser empregado no ítem b).

b) Pelo método do Jacobiano, a densidade de Y = sen(πX/2) é:

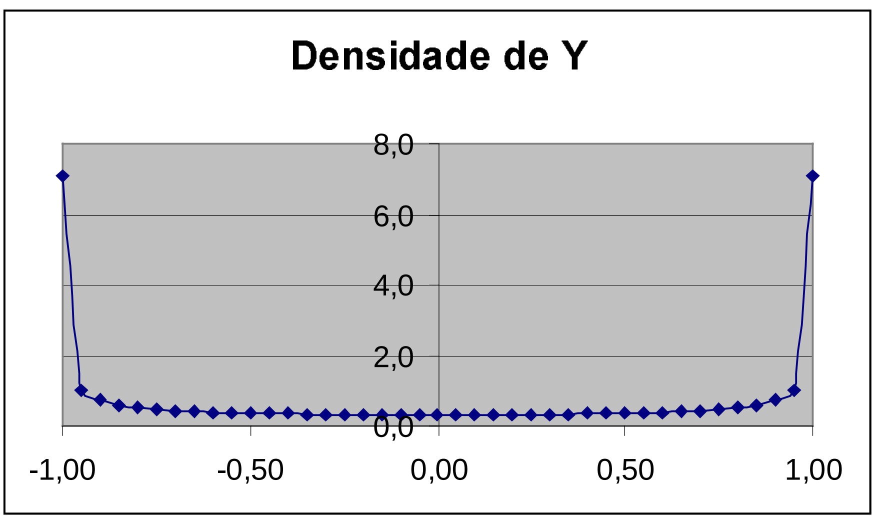
g(y) = f(x) |dx/dy| onde x (a variável antiga) é escrito em termos de y (a variável nova).

Mas y = sen(πx/2) $\Rightarrow$ πx/2 = arc sen(y) $\Rightarrow x = \dfrac{2}{\pi}\,\text{arc sen(y)} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$

Logo, a densidade de y é:

$$g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad \text{onde } -1 < y < 1$$

O gráfico da densidade é mostrado a seguir.



a) Pelo método da função da distribuição:

$$G(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(\cos\left(\frac{\pi X}{2}\right) \le y\right) = \Pr\left(X \le \frac{-2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\,\text{ou}\,X \ge \frac{2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right)$$ (veja o gráfico da função $\cos(\pi x/2)$ para verificar que os eventos acima mencionados são equivalentes).

Logo:

$$G(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(\cos\left(\frac{\pi X}{2}\right) \le y\right) = \Pr\left(X \le \frac{-2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right) + \Pr\left(X \ge \frac{2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right)$$

Note que a função arc cos produz um número entre 0 e π e portanto $\frac{2}{\pi}arc\cos(y)$ é sempre um número entre 0 e 1.

Também, quando X $\to$ -1, Y $\to$ 0 e quando X $\to$ +1, Y $\to$ 0 . Também, o valor máximo de Y é 1, encontrado quando X = 0.

Mas, X é Uniforme no intervalo (-1, 1) e então a função de distribuição de X é:

$$\Pr(X \le x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}(x+1)$$ e a probabilidade do evento complementar é:

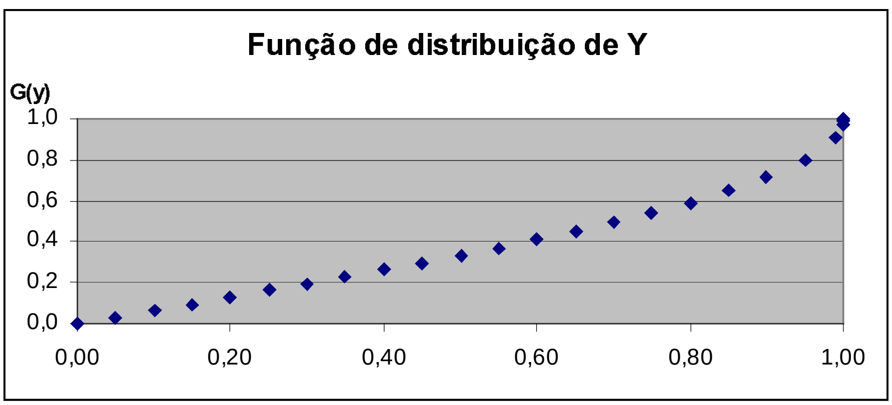
$$\Pr(X > x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}(1-x)$$

Logo, a função de distribuição de Y é:

$$G(y) = \Pr\left(X \le \frac{-2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right) + \Pr\left(X > \frac{2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{-2}{\pi}\text{arc}\cos(y) + 1\right\} + \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}\text{arc}\cos(y)\right\} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\{\text{arc}\cos(y)\}$$

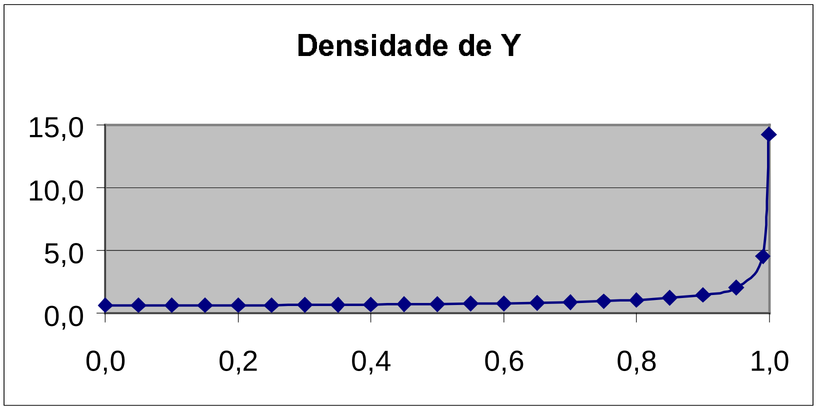
O gráfico da função de distribuição está a seguir.



A densidade de Y é encontrada derivando-se a sua função de distribuição:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{-2}{\pi}\frac{d\{\text{arc}\cos(y)\}}{dy} = \frac{-2}{\pi}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right\} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$ onde 0< y < 1

O gráfico da densidade está a seguir.


Densidade de Y
15,0
10,0
5,0
0,0
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0