

Soluções – Capítulo 5

Problema 1

Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} e^{-y/2}, x > 0, y > x$$

- Ache a densidade marginal de X.
- Ache a densidade marginal de Y.
- Calcule $\Pr(X > 1 | Y < 4)$

Dica:

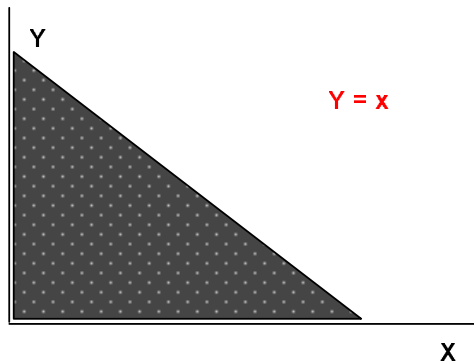
$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \cdot \left(u - \frac{1}{a} \right)$$

Solução

a) A densidade marginal de X é a integral da densidade conjunta com relação a Y, isto é:

$$f_X(x) = \int_{\text{todo } y} \frac{1}{4} e^{-y/2} dy$$

Mas, quem são os limites de integração? Note que a conjunta é definida apenas na região $\{x > 0 \text{ e } x < y\}$, isto é, na região dada por:



Os limites de integração são $y = x$ e $y = +\infty$, e assim a densidade marginal de X é:

$$f_X(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{4} e^{-y/2} dy = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-y/2}}{-1/2} \right]_x^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-x/2} \text{ onde } x > 0.$$

Ou seja, a densidade marginal de X é Exponencial com média 2.

b) A densidade marginal de Y é a integral da conjunta para todo X, ou seja:

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{4} e^{-y/2} dx = \frac{1}{4} y e^{-y/2}$$

Note que esta não é uma densidade condicional, na verdade é um caso particular da densidade Gama.

c) A probabilidade condicional pedida é:

$$\Pr(X > 1 | Y < 4) = \frac{\Pr(X > 1, Y < 4)}{\Pr(Y < 4)}$$

O numerador nesta expressão é calculado a partir da densidade conjunta, e o denominador é obtido a partir da densidade marginal de Y.

Especificamente:

$$\Pr(Y < 4) = \int_0^4 \frac{1}{4} y \cdot e^{-y/2} dy \text{ e, usando a "dica", esta integral é:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{4} y \cdot e^{-y/2} dy &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{-y/2}}{(-1/2)} \left(y - \frac{1}{(-1/2)} \right) \right\} \Big|_0^4 = \frac{-1}{2} \left\{ e^{-y/2} (y + 2) \right\} \Big|_0^4 = \frac{-1}{2} \{ 6e^{-2} - 2 \} = \\ &= 1 - 3e^{-2} = 0.5940 \end{aligned}$$

E também:

$$\Pr(X > 1, Y < 4) = \int_1^4 \int_1^y \frac{1}{4} e^{-y/2} dx dy = \frac{1}{4} \int_1^4 (y-1) e^{-y/2} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^4 y \cdot e^{-y/2} dy - \frac{1}{4} \int_1^4 e^{-y/2} dy = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{-y/2}}{-1/2} \left(y - \frac{1}{(-1/2)} \right) \right\} \Big|_1^4 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{-y/2}}{-1/2} \right\} \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ -2e^{-y/2} (y + 2) + 2e^{-y/2} \right\} \Big|_1^4 = \frac{1}{4} \left\{ -2e^{-y/2} (y + 1) \right\} \Big|_1^4 = \frac{1}{4} \left\{ -10e^{-2} + 4e^{-1/2} \right\} =$$

$$= e^{-1/2} - \frac{5}{2} e^{-2} = 0.2682$$

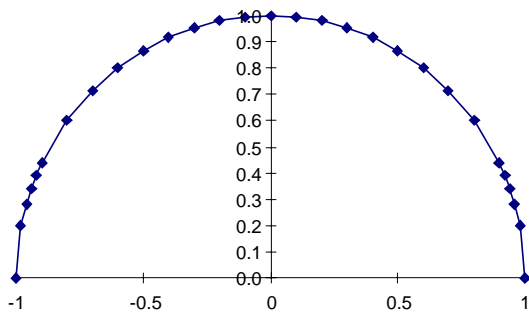
$$\Pr(X > 1 | Y < 4) = \frac{0.2682}{0.5940} = 0.4515$$

Problema 2

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi} \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Isto é, a densidade conjunta é Uniforme no semi-círculo indicado na figura a seguir:



- a) Encontre as densidades marginais de X e Y.
 b) Ache as densidades condicionais.
 c) Calcule as médias condicionais de X dado Y = y e de Y dado X = x.

Solução

A densidade marginal de X é:

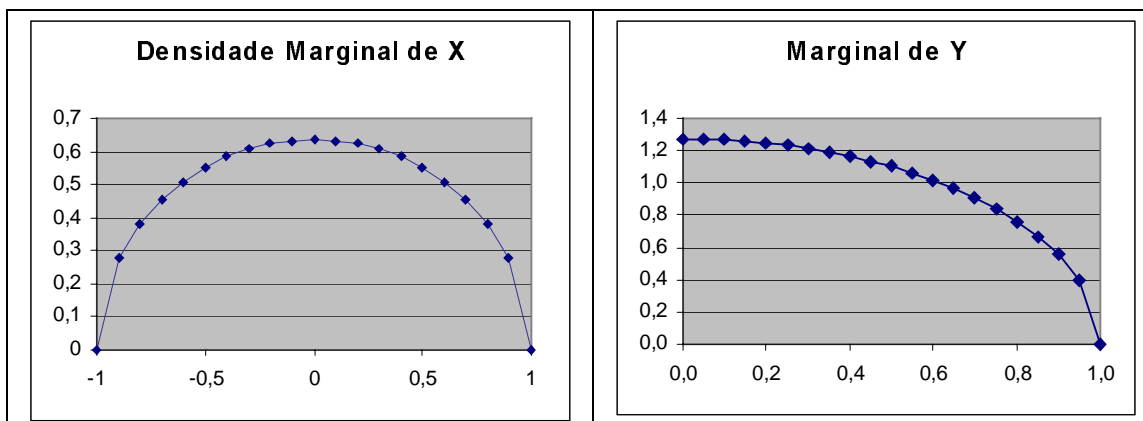
$$f_X(x) = \int_{\text{todo } y} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \left\{ \sqrt{1-x^2} \right\} \text{ onde } -1 \leq x \leq 1$$

A densidade marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \int_{\text{todo } x} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi} dx = \frac{4\sqrt{1-y^2}}{\pi} \text{ onde } 0 \leq y \leq 1$$

Verifique que as integrais destas densidades marginais são 1 nos intervalos especificados.

A seguir apresentamos os gráficos destas densidades marginais.



A densidade condicional de X dado Y = y é:

$$f(x|y) = \frac{\text{conjunta}}{\text{marginal de Y}} = \frac{(2/\pi)}{(4/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \text{ onde } -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

Note que, no caso desta densidade condicional, Y = y deve ser encarado como um valor fixo e conhecido. Por exemplo, se y = 1/2 então a densidade condicional de X dado Y = 1/2 é:

$$f\left(x \middle| \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3/4}} \text{ onde } -\sqrt{3/4} \leq x \leq \sqrt{3/4}, \text{ ou seja, é a densidade Uniforme no intervalo } [-\sqrt{3/4}, +\sqrt{3/4}]$$

Analogamente, a densidade marginal de Y dado X = x é:

$$f(y|x) = \frac{\text{conjunta}}{\text{marginal de X}} = \frac{(2/\pi)}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ onde } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Ou seja, dado X = x, Y é Uniforme no intervalo $[0, \sqrt{1-x^2}]$.

A média condicional de X dado Y = y é apenas a média calculada usando-se a densidade condicional de X dado Y = y, ou seja:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y) dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} x dx = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \left\{ \frac{x^2}{2} \right\}_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{1-y^2}} \left\{ (1-y^2) - (1-y^2) \right\} = 0$$

A média condicional de Y dado X = x é:

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x) dy = \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{y^2}{2} \right\}_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left\{ (1-x^2) \right\} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Note que estes resultados sobre as médias condicionais poderiam ter sido encontrados a partir de propriedades da densidade Uniforme.

Especificamente, lembre-se que, se uma variável U qualquer tem densidade Uniforme no intervalo (a, b) então a média de U é (a+b)/2.

Neste exemplo, a densidade condicional de Y dado X = x é Uniforme no intervalo $[0, \sqrt{1-x^2}]$ e então a média desta densidade condicional (ou seja, $E(Y|X=x)$) é apenas $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ conforme demonstrado analiticamente acima. De maneira semelhante, a densidade condicional de X dado Y = y é Uniforme no intervalo

$[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$ e então a média desta densidade condicional é zero.

Problema 3

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{2}{n(n+1)} \text{ para } x = 1, 2, \dots, n \text{ e } y = 1, 2, \dots, x$$

- Ache a média condicional de X dado Y = y.
- Ache a média condicional de Y dado X = x.
- Encontre a covariância entre X e Y.

Problema 4

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \text{ se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < x$$

Encontre as densidades marginais de X e Y.

Problema 5

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = \exp(-y), \quad 0 \leq x \leq y$$

- Encontre as marginais de X e Y.
- Encontre a densidade condicional de X dado Y.
- Ache a covariância e o coeficiente de correlação.
- Encontre a densidade condicional de Y dado X.
- Encontre as médias condicionais de X dado Y = y e de Y dado X = x.

Problema 6

Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{k(1+x+y)}{(1+x)^4(1+y)^4} \text{ onde } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

- Calcule a constante k.
- Encontre a densidade marginal de X.

Problema 7

As variáveis aleatórias X e Y têm densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \frac{6}{7}(x+y)^2, 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1$$

Encontre a densidade marginal de X.

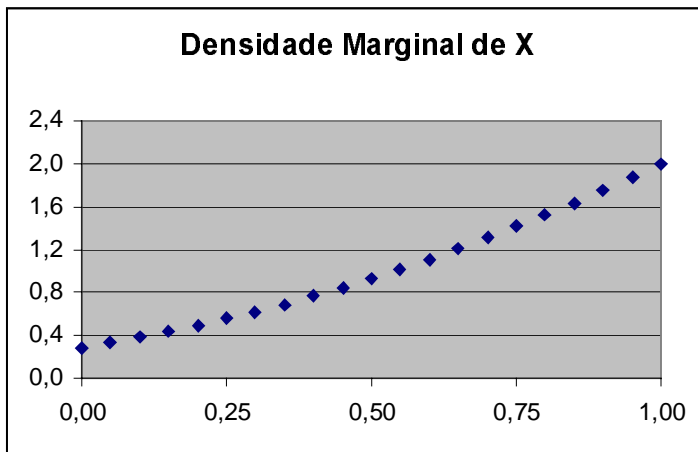
Solução

O domínio da densidade conjunta é apenas o quadrado $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$.

A densidade marginal de X é encontrada integrando-se a conjunta para todo y, isto é:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dy = \int_0^1 \frac{6}{7}(x^2 + 2xy + y^2) dy = \frac{6}{7} \left(x^2 + x + \frac{1}{3} \right) \text{ onde } 0 \leq x \leq 1.$$

O gráfico da densidade marginal de X é mostrado a seguir.



Problema 8

Seja T uma variável aleatória contínua com densidade $f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$ onde $t > 0$ e $\lambda > 0$.

Dado $T = t$, U tem densidade Uniforme no intervalo $[0, t]$.

Encontre a média e variância incondicionais de U, comparando-as com os respectivos momentos condicionais.

Solução

A densidade conjunta de U e T é apenas o produto da marginal de T e da condicional de U dado T = t. Note que a densidade condicional de U dado T = t é apenas (1/t) onde $0 < u < t$. Então:

$$f(u, t) = f_T(t) \cdot f(u | t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \frac{1}{t} \quad \text{onde } 0 < u < t \text{ e } t > 0$$

A densidade marginal de U é encontrada pela integração da conjunta para todo T, ou seja:

$$f_U(u) = \int_u^{\infty} (\lambda)(t)^{-1} \exp(-\lambda t) dt$$

O cálculo desta integral é bastante complicado, e apenas uma transformação de variáveis apropriada não resolve o problema.

Na verdade, esta é (a menos de uma constante, que é o próprio λ) a função $E_1(u)$ descrita na pág. 228 de Abramowitz e Stegun (Handbook of Mathematical Functions) dada a seguir:

$$E_1(u) = \int_u^{\infty} (t)^{-1} \exp(-t) dt = \gamma + \log(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{(k)(k!)} \quad \text{onde } \gamma = 0.557156649\dots \text{ é a constante de Euler.}$$

Em resumo: o problema é muito mais complicado do que eu originalmente pensei !!!!

Problema 9

Seja $\theta \sim \text{Unif}(0, 2\pi)$. Defina $X = \cos(\theta)$ e $Y = \sin(\theta)$.

Mostre que $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ e portanto $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Mostre também que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ mas X e Y *não são* independentes.

Problema 10

Toma-se duas medidas **independentes** X e Y de uma quantidade desconhecida μ . Suponha que $E(X) = E(Y) = \mu$ mas $\text{VAR}(X) = \sigma_x^2 \neq \text{VAR}(Y) = \sigma_y^2$.

Combinamos as duas medidas da seguinte forma:

$Z = \alpha \cdot X + (1-\alpha) \cdot Y$ onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é uma constante.

- Mostre que $E(Z) = \mu$.
- Encontre α em termos das variâncias de X e Y de forma a minimizar $\text{VAR}(Z)$.
- Em que circunstâncias é melhor usar a média $Z = (X+Y)/2$ que X ou Y?

Solução

a) Pela linearidade das integrais ou somatórios envolvidos:

$$E(Z) = \alpha \cdot E(X) + (1-\alpha) \cdot E(Y) = \alpha \cdot \mu + (1-\alpha) \cdot \mu = \mu$$

b) $\text{VAR}(Z) = \alpha^2 \cdot \text{VAR}(X) + (1-\alpha)^2 \cdot \text{VAR}(Y) + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{XY} \sqrt{\text{VAR}(X) \cdot \text{VAR}(Y)}$

Mas, $\rho_{XY} = 0$ pois X e Y são, por hipótese, independentes.

Logo a expressão para a variância de Z se reduz a:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(Z) &= \alpha^2 \cdot \text{VAR}(X) + (1-\alpha)^2 \cdot \text{VAR}(Y) = \alpha^2 \cdot \sigma_x^2 + (1-\alpha)^2 \cdot \sigma_y^2 = \\ &= \alpha^2 \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2\alpha \cdot \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

Um ponto crítico é obtido fazendo-se a 1ª. derivada com relação a α igual a zero, isto é:

$$\frac{d\text{VAR}(Z)}{d\alpha} = 2\alpha \cdot \{\sigma_x^2 + \sigma_y^2\} - 2\sigma_y^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Verifique que o sinal da segunda derivada é sempre positivo e portanto o ponto crítico encontrado fornece a variância mínima (e não a máxima!). Intuitivamente o peso α encontrado acima faz sentido. Note que α é o peso associado à variável X na combinação linear que gera Z. α estará próximo de 1 (isto é, X tem peso alto e Y tem peso baixo) se a variância de Y for

grande se comparada à variância de X, isto é, se a incerteza associada à Y for grande em relação à incerteza de X. Como estamos procurando minimizar a variância de Z, faz sentido dar um peso grande à variável que exibe menor incerteza.

c) A variância de $Z = (X+Y)/2$ é igual a $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)/4$.

Se uma das variáveis tem variância muito maior do que a outra variável, a variância de Z será aproximadamente igual à maior variância (dentre σ_x^2 e σ_y^2) dividida por 4 e portanto é melhor usar a média que a variável de maior variância.

Se as variâncias de X e Y são iguais entre si, e iguais a σ^2 , então a variância de Z é igual à metade da variância de cada uma das variáveis X e Y.

Problema 11

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Encontre a densidade de $Z = X + Y$.

Solução

Use a fórmula da convolução (vide pág. 184 do livro).

A densidade de Z é dada por:

$$g(z) = \int_{\text{todo } x} f(x)f(z-x)dx$$

O problema é encontrar os limites de integração. Note que ambos X e Y estão definidos apenas no intervalo [0, 1] e então Z está definido em [0, 2].

Problema 12

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com densidade Exponencial com parâmetro λ . Encontre a densidade de $Z = X + Y$.

Solução

Pela fórmula da convolução:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{\text{todo } x} f(x)f(z-x)dx = \int_0^z \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda(z-x))dx = \int_0^z \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot z)dx = \\ &= \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot z) \int_0^z dx = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z} \quad \text{onde } z > 0 \end{aligned}$$

Este é um caso particular da densidade Gama.

Problema 13

Considere as seguintes distribuições conjuntas:

a) $f(x, y) = 4 \cdot x \cdot y \cdot \exp\{-x^2 - y^2\}$ para $x \geq 0, y \geq 0$

b) $f(x, y) = 3 \cdot x^2 / y^3$ para $0 \leq x \leq y \leq 1$

Em cada caso, determine se X e Y são independentes.

Problema 14

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = 2 \quad \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1$$

Encontre o coeficiente de correlação entre X e Y.

Problema 15

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas independentes e identicamente distribuídas com a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1} \cdot p \text{ onde } x = 1, 2, 3, \dots \text{ e } 0 < p < 1.$$

- Encontre a função de probabilidade de $Z = X + Y$.
- Ache a função de probabilidade condicional de X dado $Z = z$.
- Calcule a média condicional de X dado $Z = z$.

Solução

a) Pela fórmula da convolução:

$$\begin{aligned} \Pr\{Z = z\} &= \sum_{x=1}^{z-1} \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = z - x) = \sum_{x=1}^{z-1} p \cdot q^{x-1} \cdot p \cdot q^{z-x-1} = \sum_{x=1}^{z-1} p^2 q^{z-2} = \\ &= p^2 \cdot q^{z-2} \sum_{x=1}^{z-1} 1 = (z-1)p^2 \cdot q^{z-2} \end{aligned}$$

onde $z = 1, 2, 3, \dots$

Alguns pontos importantes devem ser observados nesta derivação:

- Os limites do somatório são 1 e $z-1$ pois ambos X e Y são inteiros maiores ou iguais a 1. Por exemplo, se o valor da soma é 5, x está restrito aos valores 1, 2, 3, 4 pois se x fosse maior ou igual a 5, y teria que ser negativo ou zero, e estaria fora da região em que foi definido.
- O somatório na 2ª. linha acima não envolve x , e existem $z-1$ termos na soma.

d) A função de probabilidade condicional de X dado $Z = z$ é:

$$f(x|z) = \frac{\text{conjunta de } X \text{ e } Z}{\text{marginal de } Z} = \frac{\text{conjunta de } X \text{ e } Z}{(z-1)p^2 q^{z-2}}$$

Mas, como calcular a conjunta de X e Z ? Note que X e Z são **dependentes** pois Z é a soma de X e Y . Logo, não é trivial (a princípio) encontrá-la.

Note que a função de probabilidade conjunta de X e Z é:

$$\Pr\{X = x, Z = z\} = \Pr\{X = x, X + Y = z\} \text{ e esta probabilidade é equivalente a:}$$

$\Pr\{X = x, Y = z - x\}$, que é fácil de calcular por causa da independência de X e Y . Isso tudo fica muito fácil de ver se a gente substitui alguns valores numéricos. Por exemplo, qual a probabilidade de que, ao mesmo tempo, X seja 2 e a soma de X e Y seja 6? Isso é a mesma coisa que a probabilidade de X ser 2 e Y ser simultaneamente 4. Então, no caso geral:

$\Pr\{X = x, Y = z - x\} = \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = z - x) = p \cdot q^{x-1} \cdot p \cdot q^{z-x-1} = p^2 \cdot q^{z-2}$. Logo, a função de probabilidade condicional pedida é:

$$f(x|z) = \frac{\text{conjunta de } X \text{ e } Z}{\text{marginal de } Z} = \frac{p^2 \cdot q^{z-2}}{(z-1)p^2 q^{z-2}} = \frac{1}{z-1} \text{ onde } x = 1, 2, \dots, z-1$$

Por exemplo, se o valor da soma (z) é 6, os valores possíveis de x são 1, 2, ..., 5, todos eles com a mesma probabilidade (1/5).

e) A média condicional de X dado $Z = z$ é calculada a partir da função de probabilidade condicional $f(x|z)$ dada acima.

$$E(X|Z = z) = \sum_{x=1}^{z-1} x \cdot f(x|z) = \sum_{x=1}^{z-1} x \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} \sum_{x=1}^{z-1} x = \frac{1}{z-1} \left\{ \frac{z(z-1)}{2} \right\} = \frac{z}{2}$$

Problema 16

A duração de lâmpadas de uma certa marca é uma variável aleatória com média de μ horas e desvio padrão de 100 horas. Toma-se uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de lâmpadas, registrando a sua duração e calculando-se a duração média. Qual o tamanho de amostra (n) necessário para que a probabilidade da média amostral diferir de μ por menos de 50 horas seja igual ou maior a 95%?

Solução

Esta é uma aplicação direta da desigualdade de Chebyshev. Queremos que a diferença entre a média amostral (\bar{X}) e a média real (mas desconhecida) da densidade seja menor que 50 horas com probabilidade de, pelo menos, 95%.

Note que \bar{X} é uma variável aleatória também com média μ , mas com variância $(100)^2/n$, que decresce à medida que tomamos mais e mais observações para calcular \bar{X} (isto é, à medida que o tamanho da amostra cresce). Por Chebyshev temos:

$$\Pr\left(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{VAR(\bar{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{10000}{n\varepsilon^2}$$

Neste caso, se $\varepsilon = 50$ horas temos:

$$1 - \frac{10000}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{10000}{n(50)^2} = 1 - \frac{10000}{2500n} = 0.95 \Rightarrow \frac{10000}{2500n} = 0.05 \text{ e então o menor tamanho de amostra necessário é:}$$

$$n = \frac{10000}{125} = 80$$

Problema 17

Uma fábrica produz bolas de brinquedo, mas existe uma certa imprecisão intrínseca ao próprio processo de fabricação, e portanto o raio de cada bola é uma variável aleatória com densidade $f(r) = 6.r(1-r)$ onde $0 < r < 1$. Encontre a densidade do volume (V) e da área da superfície (S) da bola.

Problema 18

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta: $f(x,y) = k \cdot \exp(-y)$ para $0 < x < y < 1$.

- Encontre a constante k .
- Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

Problema 19

A probabilidade de um consumidor preferir os carros de uma certa marca K é desconhecida (p). Faz-se uma pesquisa de mercado para determinar a preferência por esta marca. Qual o tamanho de amostra necessário para garantir que a frequência relativa encontrada na amostra tenha uma diferença menor que 4% do valor real p com probabilidade 95%? E com probabilidade 97.5%?

Problema 20

Sejam X e Y variáveis contínuas independentes com densidade Uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Z = X + Y$. Calcule a densidade condicional de X dado $Z = z$.

Problema 21

A venda semanal de um certo produto farmacêutico é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $f(x) = C \cdot 2^x / x!$ Onde $x = 1, 2, 3$ ou 4 .

- a) Calcule a constante C.
- b) Encontre a venda média semanal.
- c) Suponha que o preço de venda unitário deste produto é R\$ 100. A farmácia tem em estoque K produtos, e se o produto não for vendido no prazo de uma semana deve ser jogado fora, pois perde a validade. Isto acarreta um prejuízo de R\$ 40 por unidade, que é o custo do produto. Qual é a distribuição de probabilidade do lucro semanal, como função do número (K) de produtos estocados? Quantos produtos devem ser mantidos em estoque de forma a maximizar o lucro?

Problema 22

Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos dada por:

$M(t) = 0.2 \cdot \exp(t) + 0.4 \cdot \exp(4t) + 0.4 \cdot \exp(8t)$ onde t é um número real qualquer. Encontre a distribuição de probabilidade de X.

Problema 23

Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos dada por:

$M(t) = \{4 + \exp(t) + \exp(-t)\}/6$ onde t é um número real qualquer. Encontre a distribuição de probabilidade de X.