Soluções – Capítulo 6

Problema 1

Seja X uma variável aleatória com distribuição Geométrica com probabilidade p. Encontre a função de distribuição de X e calcule Pr(X ≥ k) para qualquer inteiro não negativo.

Solução

A função de probabilidade Geométrica com parâmetro p é dada por:

$$f(x) = \Pr(X = x) = p.q^{x-1} \quad \text{para } x = 1,2,3,.....$$

Logo a função de distribuição é (pela definição)

F(x) = Pr(X ≤ x) = 0 se x < 1

F(1) = Pr(X ≤ 1) = Pr(X = 1) = p

F(2) = Pr(X ≤ 2) = Pr(X = 1) + Pr(X =2) = p + p.q = p{ 1 + q} = = $p\left\{\frac{1-q^2}{1-q}\right\} = p\left\{\frac{1-q^2}{p}\right\} = 1-q^2$

F(3) = Pr(X ≤ 3) = Pr(X = 1) + Pr(X =2) + Pr(X = 3) = p + p.q + p.q^2 =

= $p\left\{\frac{1-q^3}{1-q}\right\} = p\left\{\frac{1-q^3}{p}\right\} = 1-q^3$

F(4) = Pr(X ≤ 4) = Pr(X = 1) + Pr(X =2) + Pr(X = 3) + Pr(X = 4) =

= p + p.q + p.q^2 + p.q^3 = $p\left\{\frac{1-q^4}{1-q}\right\} = p\left\{\frac{1-q^4}{p}\right\} = 1-q^4$

Em geral, para x inteiro maior que 1, F(x) = 1 - q^x .

Se x é maior que 1 mas não é inteiro, então F(x) = Pr(X ≤ u) = 1 - q^u onde u é o menor inteiro menor que x. Por exemplo, se x = 3.7549 então F(x) = F(3) = 1 - q^3.

Note que, à medida que x cresce, F(x) vai tendendo a 1.

Também, se k é *um inteiro não negativo* temos:

Pr(X ≥ k) = Pr(X = k) + Pr(X = k+1) + Pr(X = k+2) + …..

$$= p.q^{k-1} + p.q^k + p.q^{k+1} + ... = p.q^{k-1}\{1 + q + q^2\} = p.q^{k-1}\left\{\frac{1}{1-q}\right\} = \frac{p.q^{k-1}}{p} = q^{k-1}$$

Problema 2

Uma jarra contém 10 biscoitos, 4 deles salgados e 6 doces. 3 biscoitos são selecionados aleatoriamente. Seja X o número de biscoitos doces na amostra. Escreva a distribuição de probabilidade de X quando:

a) A amostragem é feita com reposição.

b) A amostragem é feita sem reposição.

c) Calcule E(X) e VAR(X) nos dois casos.

Solução

a) Amostragem com reposição

X, o número de biscoitos doces na amostra, tem distribuição Binomial com parâmetros n = 3 e p = 6/10. Logo, a função de probabilidade de X é:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{3}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^x\left(\frac{4}{10}\right)^{3-x} \quad \text{onde } x = 0,1,2,3$$

b) Amostragem sem reposição

Agora a distribuição é a Hipergeométrica, e a função de probabilidade correspondente é:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}} \quad \text{onde } x = 0,1,2,3$$

c) Em ambos os casos a média é E(X) = 3(6/10) = 1.8.

A variância, no caso da distribuição Binomial é: n.p.q = 3(6/10)(4/10) = 72/100 e no caso da distribuição Hipergeométrica é:

$$VAR(X) = n.\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = \left(\frac{72}{100}\right)\left(\frac{7}{9}\right)$$

Problema 3

O número de erros de digitação numa página de livro é uma variável aleatória Poisson com média de 2 erros a cada 5 páginas. Um capítulo contém 30 páginas. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que o número total de erros seja menor que 12.

b) De que o número total de erros exceda 10.

Solução

Note que a média de "2 erros por cada 5 páginas" equivale a " 12 erros em 30 páginas".

Seja X o número de erros em 30 páginas.

X é uma variável Poisson com média 12. Então: $\Pr(X = x) = \frac{e^{-12}(12)^x}{x!} \quad \text{onde } x = 0,1,2,......$

Pr(X < 12) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + ... + Pr(X = 11)

As probabilidades dos diversos valores de X estão na próxima tabela.

x	Pr(X = x)
0	0,00%
1	0,01%
2	0,04%
3	0,18%
4	0,53%
5	1,27%
6	2,55%
7	4,37%
8	6,55%
9	8,74%
10	10,48%
11	11,44%
Pr(X < 12)	***46,16%***

Problema 4

O número de chamadas para um telefone com prefixo 800 (chamadas grátis) é uma variável aleatória com média de 3 chamadas por minuto. Qual a probabilidade do número de chamadas num minuto ser maior que 4?

Solução

Suponha que a distribuição do número de chamadas é Poisson com a média indicada (3 chamadas por minuto). Logo, a função de probabilidade é:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{e^{-3}(3)^x}{x!} \quad \text{para } x = 0,1,2,....$$

A probabilidade desejada é:

$$\Pr(X>4)=\Pr(X=5)+\Pr(X=6)+.....=1-\Pr(X\le 4)=1-\sum_{x=0}^{4}\frac{e^{-3}(3)^x}{x!}=$$

$$=1-e^{-3}\left\{1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}\right\}=81.53\%$$

Problema 5

O número de assaltos a banco numa cidade é uma variável aleatória com distribuição Poisson com média λ = 3 assaltos por mês. Calcule as seguintes probabilidades:

a) Do número de assaltos num mês ser maior que 4.

b) Do número de assaltos num mês ser menor que 2.

Solução

a) Por coincidência, a resposta do ítem a) é exatamente a mesma que a do problema anterior.

$$\Pr(X>4)=\Pr(X=5)+\Pr(X=6)+.....=1-\Pr(X\le 4)=1-\sum_{x=0}^{4}\frac{e^{-3}(3)^x}{x!}=$$

$$=1-e^{-3}\left\{1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}\right\}=81.53\%$$

b) $\Pr(X<2)=\Pr(X=0)+\Pr(X=1)=e^{-3}\{1+3\}=4e^{-3}=19.91\%$

Problema 6

Um certo atacante da seleção brasileira acerta 80% dos pênaltis que cobra. Durante um treino antes de um jogo importante, o atacante treina cobranças de pênaltis. Suponha que todas as cobranças são independentes e calcule as seguintes probabilidades:

a) De que ele acerte o primeiro pênalti na 3a. tentativa.

b) De que o segundo gol ocorra na 4a. tentativa.

c) Suponha que o atacante cobre 10 pênaltis. Qual a probabilidade dele acertar 7 gols? Qual a probabilidade dele fazer entre 6 e 8 gols (incluindo 6 e 8)?

Solução

p = 80% = probabilidade de acertar um pênalti numa cobrança qualquer.

Suponha que X_1, X_2 , ... indica uma seqüência de variáveis Bernoulli independentes, todas com probabilidade de sucesso 80%.

a) O evento " acertar primeiro pênalti na 3ª tentativa corresponde à seqüência: F.F.S, onde F indica erro e S indica gol. A probabilidade desta seqüência é: (0.2)(0.2)(0.8) = 3.2%

b) O evento "segundo gol na 4ª tentativa" corresponde às seqüências:

S.F.F.S,

F.S.F.S,

F.F.S.S

Ou seja, este evento tem probabilidade $3(0.2)^2(0.8)^2$ = 7.68%

c) Neste caso o número de pênaltis cobrados é fixo (e igual a 10), e portanto a distribuição adequada é a Binomial com parâmetros n = 10 e p = 0.8. Seja X o número de gols marcados. Deseja-se calcular:

$\Pr(X = 7)$ e $\Pr(6 \le X \le 8)$. Estes valores podem ser calculados diretamente no Excel através da função DISTRIBINOM.

$\Pr(X = 7)$ = 20.13%

$\Pr(6 \le X \le 8)$ = 59.14%.

Problema 7

Um exame vestibular consiste em 100 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 respostas possíveis. Em cada questão, apenas uma resposta é correta.

a) Qual a probabilidade de que uma pessoa que "chute" todas as questões acerte 35 ou mais questões?

b) Qual a probabilidade desta pessoa acertar entre 17 e 25 (incluindo 17 e 25) questões?

c) Qual o número esperado de questões certas para uma pessoa que "chute" todas as questões ?

Solução

Seja X o número de acertos na prova. X é uma variável Binomial com parâmetros n = 100 tentativas (questões) e p = 0.2 (probabilidade de acerto).

No ítem a) queremos achar:

$Pr(X \geq 35) = Pr(X = 35) + Pr(X = 36) + ... + Pr(X = 100)$

E usando o Excel encontramos:

0,0336%

No ítem b) procuramos $Pr(17 \leq X \leq 25) = Pr(X = 17) + Pr(X = 18) + ... + Pr(X= 25)$

A função de probabilidade e a soma estão na próxima tabela. A probabilidade desejada é 72.02%.

x	Pr(X = x)
17	7,89%
18	9,09%
19	9,81%
20	9,93%
21	9,46%
22	8,49%
23	7,20%
24	5,77%
25	4,39%
soma:	**72,02%**

a) Dos resultados da distribuição Binomial, segue que o número esperado de acertos é n.p = 100(0.20) = 20.

Problema 8

Você arranjou um emprego numa empresa que faz pesquisas de opinião pelo telefone. Apenas 10% das chamadas resultam numa pesquisa completa, isto é, apenas 10% dos entrevistados responde todo o seu questionário. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que a primeira pesquisa completa será respondida na 5a. ligação telefônica.

b) De que a terceira pesquisa completa será respondida na 5a. ligação telefônica.

c) Se você faz exatamente 4 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar exatamente 1 pesquisa?

d) Se você faz exatamente 20 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar entre 2 e 4 entrevistas (inclusive 2 e 4)?

Solução

Para cada chamada, só existem 2 resultados possíveis: a pesquisa foi inteiramente completada (com probabilidade 10%) ou não (com probabilidade 90%). Suponha que S indica um "sucesso" (pesquisa completa) e F uma "falha". Desejamos encontrar as seguintes probabilidades:

a) Da seqüência FFFFS.

A probabilidade correspondente é $(0.90)^4(0.10) = 6.56\%$.

b) As seqüências de interesse são do tipo:

XXXXF onde os XXXX indicam 2 sucessos e 2 falhas, em qualquer ordem. Note que a última tentativa é sempre um sucesso, indicando que o terceiro sucesso encontra-se exatamente na 5ª. chamada telefônica.

Seja Y a variável que indica o número de chamadas necessárias até encontrar o 3º. sucesso (isto é, a 3ª. pesquisa respondida). Então Y é uma variável Binomial Negativa com parâmetros r = 3 e p = 10%. Queremos encontrar a probabilidade de Y ser igual a 5. Pela definição da função de probabilidade Binomial Negativa temos:

$$\Pr(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r} \quad \text{onde } y = r, r+1, r+2, \ldots.$$

Neste caso a probabilidade desejada é:

$$\Pr(Y = 5) = \binom{4}{2} (0.10)^3 (0.9)^2 = 0.5\%$$

c) Se você faz exatamente 4 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar exatamente 1 pesquisa?

Neste caso o **número de repetições é fixo**, pois fazemos exatamente 4 chamadas telefônicas.

Seja W a variável que representa o número de pesquisas respondidas dentre as 4 chamadas telefônicas. Então W é uma variável Binomial com parâmetros n = 4 e p = 10%, e precisamos encontrar a probabilidade de W ser igual a 1. Logo:

$$\Pr(W = 1) = \binom{4}{1} (0.10)^1 (0.90)^3 = 29.2\%$$

d) Se você faz exatamente 20 chamadas telefônicas, qual a probabilidade de completar entre 2 e 4 entrevistas (inclusive 2 e 4)?

Seja V o número de pesquisas respondidas dentre as 20 chamadas telefônicas. Então V é uma variável Binomial com parâmetros n = 20 e p = 10%, e precisamos encontrar a probabilidade de V estar entre 2 e 4. Logo, o resultado exato é dado pela soma das probabilidades: $\Pr(V = v) = \binom{20}{v} (0.10)^v (0.90)^{20-v}$ para v entre 2 e 4. Mas, note que este é um caso típico em que a distribuição Poisson pode ser usada como aproximação da Binomial(n, p) pois n é "grande" e p é "pequeno". Desta forma, **podemos aproximar cada probabilidade Binomial pela probabilidade Poisson correspondente**, desde que usemos a densidade Poisson com a mesma média (neste caso, igual a 20(0.1) = 2). Logo, as probabilidades dos diversos valores de V podem ser **aproximadas** pela fórmula: $\Pr(V = v) = \dfrac{e^{-2}(2)^v}{v!}$.

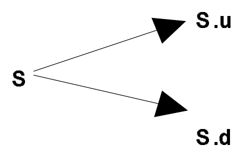
A próxima tabela apresenta os valores reais e aproximados destas probabilidades.

x	Pr(X = x) REAL	Pr(X = x) APROX.
2	28,52%	27,07%
3	19,01%	18,04%
4	8,98%	9,02%
Pr(2 <=X <= 4)	***56,51%***	***54,13%***

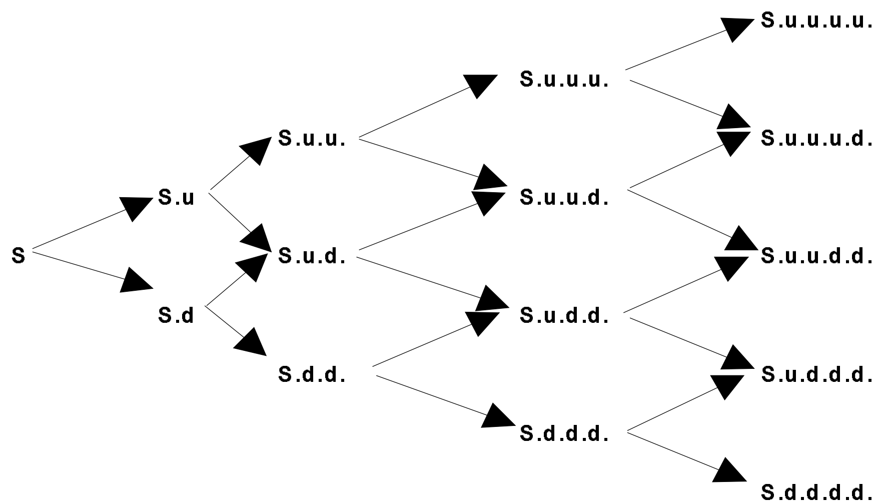
Problema 9

(Modelo Binomial para o preço de ativos financeiros)

Seja S o preço de um ativo no instante t = 1. No instante seguinte, o preço pode subir para um valor S.u com probabilidade p ou descer para o valor S.d com probabilidade q = 1-p. Note que u é um número maior que 1, enquanto d é um numero entre 0 e 1.



A evolução dos preços no tempo segue este mesmo comportamento (subir com probabilidade p ou descer com probabilidade q). Assim, após 4 instantes de tempo os valores possíveis do preço são:



As variáveis u, d e p devem ser escolhidas de tal forma que, para um intervalo de tempo pequeno Δt, o retorno esperado do ativo é $\mu.\Delta t$ e a variância do retorno é $\sigma^2 . \Delta t$, onde o retorno num intervalo de tempo Δt é definido por: $\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$ onde

$S_{t+\Delta t}$ é o preço no instante t + Δt e S_t é o preço no instante t. Supondo a evolução mostrada acima, $S_{t+\Delta t}$ = S.u ou $S_{t+\Delta t}$ = S.d e S_t = S. Logo, o retorno após um intervalo de tempo Δt é log(u) ou log(d). Se a média dos retornos for, como indicado, $\mu.\Delta t$ então o preço médio após Δt instantes é S.exp{ $\mu.\Delta t$}

Uma possível escolha para u, d e p é:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Lambda t}} \ , \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{e} \quad p = \frac{e^{\mu\Lambda t} - d}{u - d}$$

a) Usando estas fórmulas para u, d e p, encontre os preços e as probabilidades a eles associadas após 5 intervalos de comprimento Δt supondo que:

μ = 10% ao ano,

σ = 30% ao ano,

Δt = (1/52) ano, isto é, 1 semana.

b) Repita o ítem a) e calcule os preços possíveis e as probabilidades após 8 intervalos de 1 semana cada.

c) No ítem b) calcule a probabilidade do preço ser inferior a cada um dos valores possíveis, isto é, calcule a função de distribuição e faça o seu gráfico.

Problema 10

Sejam X ~ Bin(30, 0.1) e Y ~ Poisson(3).

a) Usando o software de sua preferência calcule Pr(X = x) e Pr(Y = y) para x, y = 0, 1, 2,..., 10 e compare as probabilidades em cada caso. Verifique a qualidade da aproximação pela Poisson calculando em cada caso a diferença percentual entre as probabilidades, definida como:

$$\frac{100\left|\Pr(X = x) - \Pr(Y = y)\right|}{\Pr(X = x)}$$. A diferença é grande ?

b) Calcule a função de distribuição acumulada a partir da distribuição real (Binomial) e da aproximada (Poisson) e compare os valores encontrados.

Solução

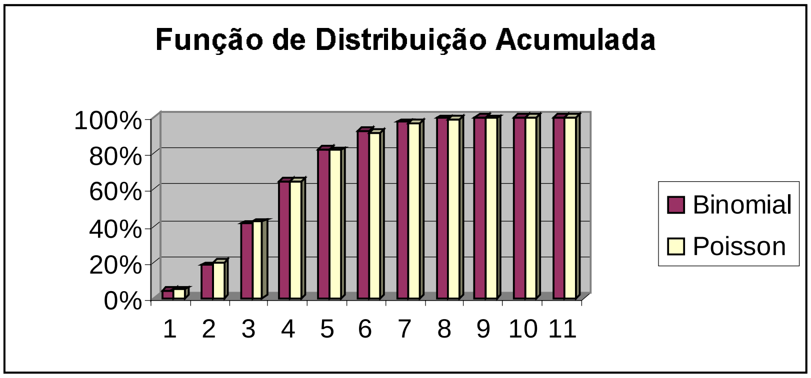
As probabilidades desejadas foram calculadas no Excel. Nota-se que o erro *percentual* da aproximação cresce muito quando as probabilidades são pequenas (por exemplo, quando x = 9 ou 10), pois a probabilidade verdadeira aparece no denominador. A próxima tabela contém as probabilidades real, aproximada e o erro percentual absoluto da aproximação.

x	Pr(X = x) Binomial	Pr(X = x) Poisson	Erro % aproximação
0	4,24%	4,98%	17,45%
1	14,13%	14,94%	5,70%
2	22,77%	22,40%	1,59%
3	23,61%	22,40%	5,10%
4	17,71%	16,80%	5,10%
5	10,23%	10,08%	1,45%
6	4,74%	5,04%	6,43%
7	1,80%	2,16%	19,74%
8	0,58%	0,81%	40,56%
9	0,16%	0,27%	72,50%
10	0,04%	0,08%	121,79%

As funções de distribuição acumulada Binomial e Poisson estão na tabela a seguir, e o próximo gráfico apresenta estas mesmas probabilidades.

x	F(x) Binomial	F(x) Poisson
0	4,24%	4,98%
1	18,37%	19,91%
2	41,14%	42,32%
3	64,74%	64,72%

4	82,45%	81,53%
5	92,68%	91,61%
6	97,42%	96,65%
7	99,22%	98,81%
8	99,80%	99,62%
9	99,95%	99,89%
10	99,99%	99,97%



Problema 11

Uma pesquisa feita entre adolescentes revelou que:

60% abominam saladas e preferem comer hamburguer com batatas fritas;

30% comem saladas pois acham que é bom para a saúde;

10% adoram vegetais e para eles saladas são um prazer gastronômico.

Toma-se uma amostra de 8 adolescentes. Qual a probabilidade de que pelo menos 5 deles detestem saladas?

Solução

Este é tipicamente um problema da distribuição Multinomial, pois cada repetição da experiência (comer alguma coisa) resulta em mais de 2 tipos de resultados diferentes (comer hamburguer, comer salada por obrigação, comer saladas por prazer). Sejam X_1, X_2 e X_3 respectivamente o número de adolescentes que abominam saladas, comem saladas por obrigação e por prazer. A probabilidade desejada é:

$\Pr\{X_1 \geq 5\} = \Pr\{X_1 = 5\} + \Pr\{X_1 = 6\} + \Pr\{X_1 = 7\} + \Pr\{X_1 = 8\}$, que envolve apenas X_1 e então neste caso podemos usar apenas a distribuição marginal de X_1, que é Binomial com n = 8 e p = 0.6. As probabilidades desejadas estão na próxima tabela:

x	Pr(X = x)
5	27,87%
6	20,90%
7	8,96%
8	1,68%
Soma:	**59,41%**

Problema 12

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, onde X_1 ~ Bin(n_1, p) e X_2 ~ Bin(n_2 , p). Mostre que a variável Y = X_1 + X_2 tem distribuição Binomial com parâmetros n_1+ n_2 e p.

Dica : dependendo do método que você decidir utilizar, o somatório a seguir pode ser útil.

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}=\binom{a+b}{n}$$

Problema 13

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas e independentes com densidades marginais:

$$\Pr(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad k = 0,1,2,\ldots. \quad \text{e}$$

$$f_2(y)= \Pr(Y = y) = \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!} \quad \text{y=0,1,2.....} \quad \text{onde } \lambda > 0$$

Ou seja, X e Y são independentes com distribuições Poisson(λ) e Poisson(2λ) respectivamente.

a) Calcule a função de probabilidade de Z = X + Y .

b) Mostre que a função de probabilidade condicional de X dado Z = z é :

$$f(x|Z = z) = \Pr(X = x|Z = z) = \binom{z}{x}.\left(\frac{1}{3}\right)^x.\left(\frac{2}{3}\right)^{z-x} \quad \text{onde } x = 0,1,2,\ldots,z$$

Isto é, X dado Z = z é Binomial(z, 1/3).

c) A partir da distribuição encontrada em b), mostre que a média condicional de X dado Z = z é E(x| Z =z) = z/3.

d) Repita os ítens b) e c) supondo que X ~ Poisson(λ) e Y ~ Poisson(n.λ) são independentes, onde n é uma constante conhecida.

e) Na situação do ítem d) encontre a média condicional E(x| Z =z).

Problema 14

Seja X uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro λ, onde λ é também uma variável aleatória, com distribuição Exponencial com média 1. Mostre que, incondicionalmente: $\Pr(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad k = 0,1,2,\ldots.$

Solução

X dado λ é Poisson(λ), e a marginal de λ é Exponencial(1). Assim, a conjunta de X e λ é:

f(x, λ) = f(x|λ).f(λ) = $\dfrac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}\left\{e^{-\lambda}\right\} = e^{-2\lambda}\left\{\dfrac{\lambda^x}{x!}\right\}$

A densidade marginal de X é encontrada integrando-se a conjunta para todo λ, isto é, para λ >0. Então:

$$\Pr(X = x) = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda}\left(\frac{\lambda^x}{x!}\right)d\lambda = \frac{1}{x!}\int_0^{\infty}\lambda^{x+1-1}e^{-2\lambda}$$

Faça a mudança de variáveis t = 2λ e a integral anterior se reduz a:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{x+1-1} e^{-t}\frac{dt}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\Gamma(x+1) = x!\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

Finalmente:

$$\Pr(X = x) = \frac{1}{x!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} x! = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \quad \text{onde } x = 0,1,2,.....$$

Problema 15

Numa certa Universidade, as matérias são classificadas pelos alunos como: chatíssimas (10%), chatas (15%), regulares (25%), boas (30%) ou ótimas (20%). Você se matricula em 6 matérias.

a) Qual a probabilidade de 3 delas serem ótimas, 2 boas e 1 regular?

b) Qual a probabilidade de 2 delas serem ótimas, 2 boas e 2 regulares?

c) Qual a probabilidade de 3 delas serem chatíssimas, 2 chatas e 1 regular?

Solução

Este é também um problema multinomial, mas agora estamos interessados na probabilidade conjunta. Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 respectivamente o número de matérias chatísssimas, chatas, regulares, boas e ótimas. Procuramos calcular as seguintes probabilidades:

a) Pr($X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$, $X_4 = 2$, $X_5 = 3$) = $\frac{6!}{0!0!1!2!3!}(0.10)^0(0.15)^0(0.25)^1(0.30)^2(0.20)^3 = 1.08\%$

b) Pr($X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$) = $\frac{6!}{0!0!2!2!2!}(0.10)^0(0.15)^0(0.25)^2(0.30)^2(0.20)^2 = 2.03\%$

c) Pr($X_1 = 3$, $X_2 = 2$, $X_3 = 1$, $X_4 = 0$, $X_5 = 0$) = $\frac{6!}{3!2!1!0!0!}(0.10)^3(0.15)^2(0.25)^1(0.30)^0(0.20)^0 = 0.03\%$

Problema 16

Um livro de estatística contém 200 páginas nas quais podem existir erros de digitação. Suponha que existem, na verdade, 8 erros de digitação dispersos aleatoriamente pelo livro. Qual a probabilidade de que uma amostra aleatória de 40 páginas conterá pelo menos 1 erro de digitação?

Solução

X = número de erros na amostra de 40 páginas.

A função de probabilidade de X é Hipergeométrica com parâmetros:

N = 200 (tamanho da população)

n = 40 (tamanho da amostra)

r = 8 (número de páginas contendo erros)

Desejamos encontrar Pr(X ≥ 1) = 1 – Pr(X = 0)

Mas:

Pr(X = 0) =

$$\frac{\binom{8}{0}\binom{192}{40}}{\binom{200}{40}} = \frac{192!}{40!(152!)} \cdot \frac{40!(160!)}{200!} = \frac{(192!)(160!)}{(200!)(152!)} = \frac{(160)(159)(158)....(153)152!}{(200)(199)(198)...(193)192!}\frac{192!}{152!} = 16.18\%$$

Pr(X ≥ 1) = 1 – Pr(X = 0) = 83.82%

Problema 17

O número de pessoas que entram num ônibus nos pontos ao longo de uma determinada linha é uma variável Poisson com média λ. A empresa de ônibus colocou um contador de pessoas em alguns ônibus selecionados. No entanto, se mais de 10 pessoas entram no ônibus num mesmo ponto, o contador não consegue registrar o excesso de passageiros e indica que apenas 10 passageiros entraram no ônibus naquele ponto. Seja X o número de passageiros registrado pelo contador. Encontre a distribuição de probabilidade de X.

Problema 18

Uma empresa fabrica rações para alimentar animais. O produto mais popular é a ração "Big Dog" na embalagem econômica de 10 kg. No entanto, o peso da embalagem de ração sofre variações aleatórias, Seja X a variável aleatória que mede o peso da embalagem de 10 kg de "Big Dog". O gerente de produção está interessado nos seguintes 4 eventos:

$U_1 = \{ X < 9.5\}$

$U_2 = \{ 9.5 \leq X \leq 10\}$

$U_3 = \{ 10 < X \leq 10.3\}$

$U_4 = \{ X > 10.3\}$

Observando-se valores passados desta embalagem estimou-se as probabilidades destes 4 eventos como 0.2, 0.4, 0.3, 0.1 respectivamente. Toma-se uma amostra de 12 embalagens de "Big Dog". Calcule as seguintes probabilidades:

a) de 4 embalagens pesarem menos de 9.5 kg, 2 pesarem entre 9.5 e 10 kg, 3 pesarem entre 10 e 10.3 kg e 3 pesarem mais de 10.3 kg?

b) de 4 embalagens pesarem menos de 9.5 kg e 2 pesarem entre 9.5 e 10 kg ?

c) de 4 embalagens pesarem menos de 9.5 kg?

d) de 2 pesarem entre 9.5 e 10 kg ?

e) de 3 pesarem entre 10 e 10.3 kg?

Solução

a) $\Pr(U_1 = 4, U_2 = 2, U_3 = 3, U_4 = 3) = \dfrac{12!}{4!2!3!3!}(0.2)^4(0.4)^2(0.3)^3(0.1)^3 = 0.19\%$

b) A probabilidade desejada neste caso é:

$\Pr(U_1 = 4, U_2 = 2)$ onde U_3 e U_4 são quaisquer, restritos apenas pela condição de que a soma deve ser igual a 12. Na verdade, a densidade conjunta de U_1 e U_2 é apenas uma trinomial, isto é:

$\Pr(U_1 = u, U_2 = v, Y = y) = \dfrac{12!}{u!v!y!}(0.2)^u(0.4)^v(0.4)^y$ onde Y é apenas $12 - U_1 - U_2$, isto é, o número de embalagens cujo peso está acima de 10 kg. Logo, a probabilidade desejada é:

$\Pr(U_1 = 4, U_2 = 2) = \dfrac{12!}{4!2!6!}(0.2)^4(0.4)^2(0.4)^6 = 1.45\%$

c) $\Pr(U_1 = 4) = ?$

A função de probabilidade de U_1 é Binomial com parâmetros n = 12 e p = 0,2 e assim:

$\Pr(U_1 = 4) = 13.29\%$ (verifique!!!!)

d) $\Pr(U_2 = 2) = ?$

A função de probabilidade de U_2 é Binomial com parâmetros n = 12 e p = 0,4 e assim: $\Pr(U_2 = 2) = 6.39\%$.

e) $\Pr(U_3 = 3)$ é calculada a aprtir da distribuição Binomial com n = 12 e p = 0,3, e o resultado é:23.97%.

Problema 19

Numa agência bancária, 10% dos clientes classificam o atendimento como "ótimo", 25% o consideram "bom", 35% acham que o atendimento é "regular" e o restante pensa que o atendimento é "ruim ou péssimo". O banco decide implantar um programa de qualidade, e como parte deste esforço, faz uma pesquisa sobre a qualidade dos serviços nesta agência. Toma-se uma amostra de 30 clientes da agência. Calcule as seguintes probabilidades:

a) De que o número de pessoas que classificam os serviços como "ótimo", "bom", "regular" e "ruim ou péssimo" é, respectivamente, 4, 8, 8, 10.

b) De que o número de pessoas que classificam os serviços como "ótimo" e "bom" é maior que 20.

c) De que o número de pessoas que classificam os serviços como "ruim ou péssimo" é menor que 5.

Solução

É uma aplicação direta da distribuição Multinomial. Note que, cada tentativa ou repetição tem mais de 2 resultados possíveis, e queremos descobrir, num número fixo de repetições, quantas caem em cada categoria.

Sejam X_1 o número de pessoas na amostra que considera o atendimento "ótimo", X_2 o número dos que consideram o atendimento "bom", X_3 aqueles que acham que o atendimento é "regular" e X_4 os que pensam que o atendimento é "ruim ou péssimo". Então, em geral:

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) = \frac{30!}{x_1!x_2!x_3!x_4!}(0.10)^{x_1}(0.25)^{x_2}(0.35)^{x_3}(0.30)^{x_4}$$

onde $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ e $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.10 + 0.25 + 0.35 + 0.30 = 1$.

No ítem a) desejamos encontrar:

$$\Pr(X_1 = 4, X_2 = 8, X_3 = 8, X_4 = 10) = \frac{30!}{x_1!x_2!x_3!x_4!}(0.10)^4(0.25)^8(0.35)^8(0.30)^{10} = 0.38\%$$

No ítem b) devemos reparametrizar o problema. As únicas varáveis de interesse tornam-se:

X_1 = número de pessoas que pensam que o serviço é "ótimo ou bom".

X_2 = número de pessoas que pensam o contrário.

Note que a probabilidade de alguém achar o serviço ótimo ou bom é 35% (isto é, 10% + 25%).

Então X_1 é Binomial com parâmetros n = 30 e p = 0.35. A probabilidade desejada é: $\Pr(X_1 \geq 20)$. A tabela abaixo mostra os valores das probabilidades para x maior ou igual a 20.

x	Pr(X = x)
20	0,031%
21	0,008%
22	0,002%
23	0,000%
24	0,000%
25	0,000%
26	0,000%
27	0,000%
28	0,000%
29	0,000%
30	0,000%
P(X > = 20)	**0,041%**

c) É análogo ao anterior.

Seja Y a variável que mede o número de pessoas na amostra que consideram o serviço "ruim ou péssimo". Então Y é uma variável Binomial com parâmetros n = 30 e p = 30%. Desejamos encontrar a probabilidade de Y ser menor que 5, isto é, $\Pr(Y < 5) = \Pr(Y \leq 4)$, e os valores para Y entre 0 e 4 estão na tabela a seguir.

x	Pr(X = x)
0	0,002%
1	0,029%
2	0,180%
3	0,720%
4	2,084%
P(Y <= 4)	**3,015%**

Problema 20

Suponha que X tem distribuição Poisson com média λ. Em cada caso a seguir calcule as probabilidades desejadas.

a) Suponha que Pr(X = 0) = 0.2 e calcule Pr(X > 2).

b) Suponha que Pr(X = 2) = (2/3)Pr(X = 1). Calcule Pr(X < 4).

Solução

a) Note que, se X é uma variável Poisson com média λ então Pr(X = x) = $\dfrac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$ e , em particular:

Pr(X = 0) = exp(-λ). Logo, neste caso: 0.2 = exp(-λ) e daí -λ = log(0.2) = -1.609 $\Rightarrow \lambda = 1.609$.

A probabilidade desejada é: Pr(X > 2) = Pr(X= 3) + Pr(X = 4) + ... = 1 – Pr(X=0) – Pr(X = 1) – Pr(X=2) e o resultado desejado está na tabela a seguir. Pr(X > 2) = 21.91%

x	Pr(X = x)
0	0,2000
1	0,3219
2	0,2590
soma =	0,7809
1-soma =	***21,91%***

b) Por argumentos análogos aos do ítem anterior:

Pr(X = 2) = (2/3)Pr(X = 1) $\Rightarrow \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} = \dfrac{2}{3}\left(\lambda . e^{-\lambda}\right) \Rightarrow \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \lambda = \dfrac{4}{3}$

Pr(X < 4) = Pr(X=0) + Pr(X = 1) + Pr(X=2) + Pr(X= 3) e a resposta é indicada na tabela a seguir.

x	Pr(X = x)
0	0,2636
1	0,3515
2	0,2343
3	0,1041
soma =	***0,9535***

Problema 21

A probabilidade de uma pessoa ter certo defeito genético é 0.2%. Qual a probabilidade de que, numa amostra aleatória de 1000 pessoas, no máximo uma pessoa apresente este defeito?

Solução

Neste caso é importante notar quais são os argumentos usados para chegar à resposta final.

Em primeiro lugar: o tamanho da amostra é grande, e portanto faz pouca diferença se usarmos amostragem com ou sem reposição. Suponha assim que usamos amostragem **com** reposição, e a distribuição de probabilidade relevante é a Binomial com parâmetros n = 1000 e p = 0.2%. Mas, dos resultados do capítulo 6, esta distribuição pode ser adequadamente aproximada por uma Poisson com a mesma média, que é: 1000(0.2%) = 2.

Seja X o número de pessoas na amostra com o defeito genético. A probabilidade pedida é:
$\Pr(X \le 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = e^{-2} + 2.e^{-2} = 3.e^{-2} = 0.406 = 40.6\%$.