

Soluções - Capítulo 7

Lista – semestre 2000.02: 2, 3, 5 a 11, 15, 16, 17, 21, 24, 25

Problema 1

Ache a mediana das densidades Qui-quadrado com 1 e 2 graus de liberdade.

Solução

A densidade Qui-quadrado com n graus de liberdade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Onde n é um inteiro maior ou igual a 1.

Em particular, a densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-x/2}$$

pois $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

e a densidade Qui-quadrado com 2 graus de liberdade é:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(1)} \cdot x^{\frac{2}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}$$

ou seja, coincide com a densidade Exponencial com média 2.

Em ambos os casos, a mediana é o ponto m tal que $\Pr(X < m) = \Pr(X > m) = 50\%$ e assim precisamos resolver (numérica ou analiticamente) as integrais:

a) Para a densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade

$$\int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} dx = 0.5$$

A solução numérica desta equação nos dá: $m = 0.4549$

b) Para a densidade Qui-quadrado com 2 graus de liberdade

$$\Pr(X > 88) = \Pr\left(\frac{X - 85}{10} > \frac{88 - 85}{10}\right) = \Pr(Z > 0.3) = 1 - \Phi(0.3) = 38.21\%$$

$$\frac{-m}{2} = \log(0.5) = -0.6932 \Rightarrow m = 1.3863$$

Problema 2

A renda doméstica mensal num certo bairro do Rio de Janeiro é uma variável aleatória com distribuição Gama com média R\$ 2000 e desvio padrão R\$ 400.

- Ache os parâmetros α e β desta densidade.
- Calcule a probabilidade da renda média mensal de um domicílio exceder R\$2500.
- Qual a mediana desta distribuição Gama?

Solução

a) Se X tem distribuição Gama com parâmetros α e β então a média de X é $\alpha \cdot \beta$ e sua variância é $\alpha \cdot \beta^2$. Logo, neste caso:

$$\alpha \cdot \beta = 2000 \text{ e } \sqrt{\alpha \cdot \beta^2} = 400 \Rightarrow \alpha = \frac{2000}{\beta} \Rightarrow \sqrt{\frac{2000\beta^2}{\beta}} = \sqrt{2000\beta} = 400 \Rightarrow 2000\beta = 160000$$

e

$$\beta = \frac{160000}{2000} = 80 \Rightarrow \alpha = \frac{2000}{80} = \frac{200}{8} = 25$$

Logo X tem distribuição Gama(25, 80) e sua densidade é:

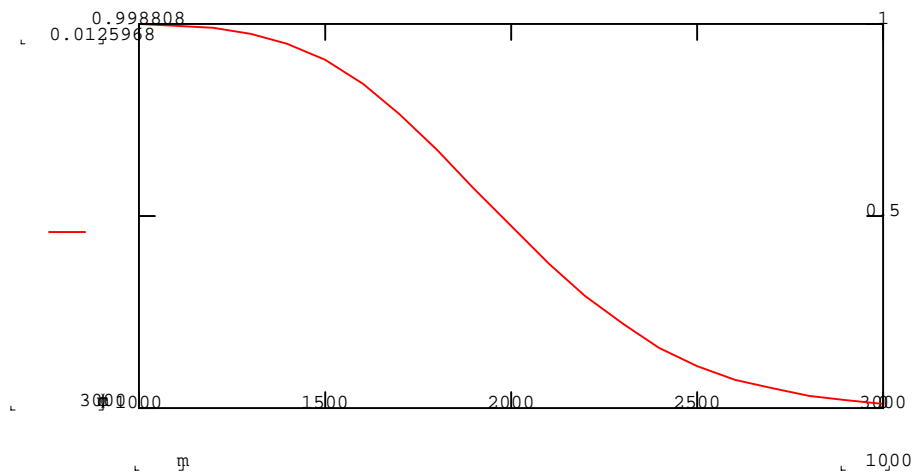
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) = \frac{1}{\Gamma(25)80^{25}} x^{24} \exp(-x/80) = \frac{1}{(80^{25})24!} x^{24} \exp(-x/80)$$

b) A probabilidade da renda mensal de um domicílio exceder R\$ 2500 pode ser encontrada numericamente através da integral:

$$\int_{2500}^{\infty} \frac{80^{25}}{24!} x^{24} \exp(-80x) dx = 1 - \int_0^{2500} \frac{80^{25}}{24!} x^{24} \exp(-80x) dx = 1 - 0.8896 = 11.04\%$$

Abaixo exibimos, apenas a título de curiosidade, uma tabela contendo as probabilidades da renda exceder o valor indicado, e o gráfico correspondente.

Renda	Pr($X >$ renda)
1000	99.88%
1500	90.40%
2000	47.34%
2500	11.04%
3000	1.26%



c) A mediana desta distribuição Gama é encontrada numericamente através de (vide problema 1):

$$\int_0^m \frac{80^{25}}{24!} x^{24} \exp(-80x) dx = 0.5 \Rightarrow m = 1973.40$$

Problema 3

- a) Faça um gráfico das densidades Qui-quadrado com 1, 2, 3, 5, 8 e 12 graus de liberdade.
 b) Calcule a mediana de cada uma das densidades do ítem a). Você consegue identificar alguma relação entre a média e a mediana?
 c) Faça o gráfico da função de distribuição de cada uma das densidades do ítem a).

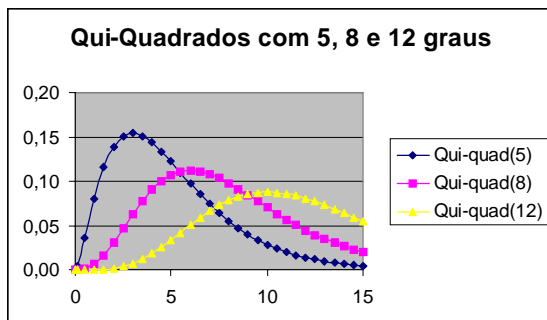
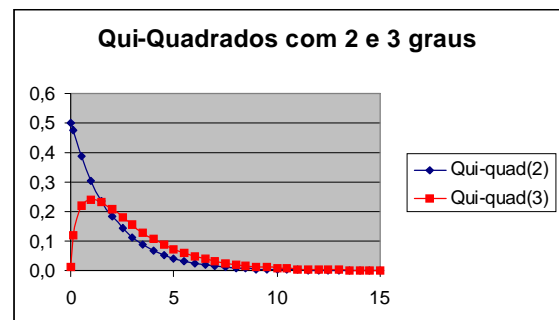
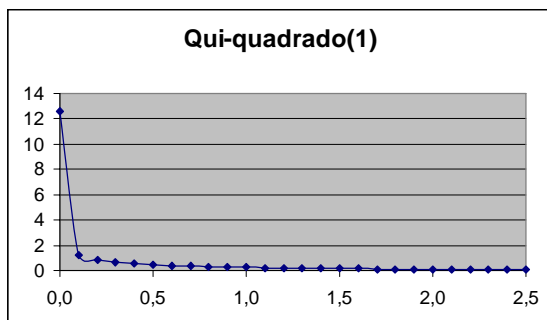
Solução

A densidade Qui-quadrado com n graus de liberdade é dada por (vide problema 1):

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Onde n é um inteiro maior ou igual a 1.

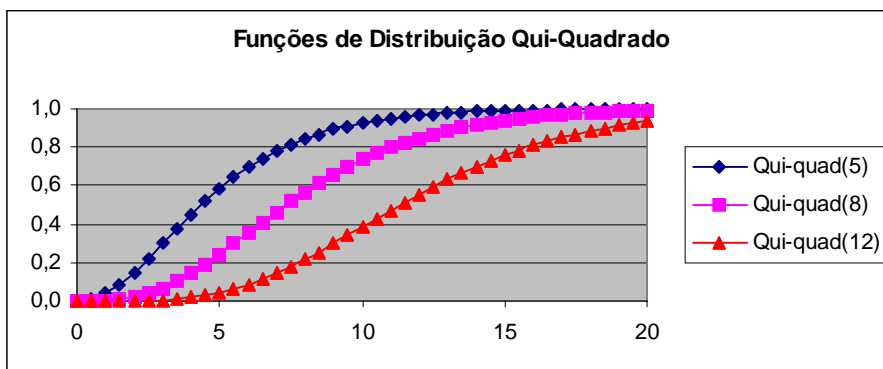
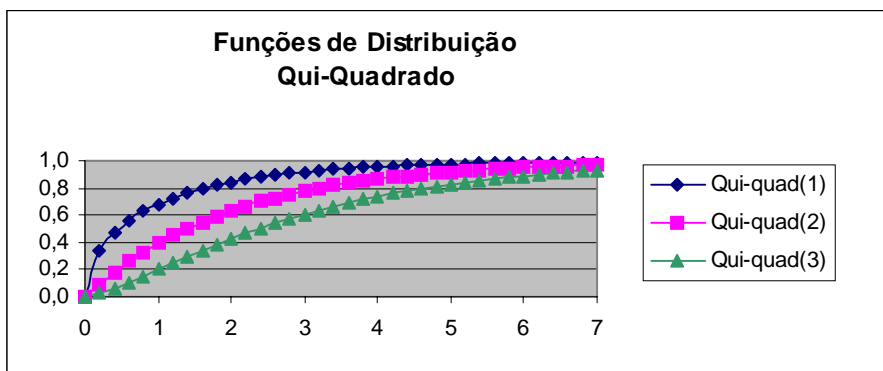
- a) O gráfico das densidades pedidas é mostrado a seguir.



- a) As medianas podem ser obtidas por integração numérica, e os resultados estão a seguir. Não existe uma relação aparente entre as médias e medianas de cada uma das densidades (ao contrário do que ocorre para a densidade Exponencial), apenas fica claro que a mediana é sempre menor que a média da densidade correspondente (que é igual aos graus de liberdade da Qui-Quadrado).

Graus de Liberdade	Mediana	Média
1	0.455	1
2	1.386	2
3	2.366	3
5	4.351	5
8	7.344	8
12	11.340	12

As funções de distribuição Qui-quadrado estão pré-definidas no Excel. Basta olhar a sua sintaxe. Os gráficos a seguir foram produzidos usando as funções do Excel.



Problema 4

O percentil $(1-\alpha)\%$ de uma densidade qualquer é o ponto $x_{1-\alpha}$ tal que

$\Pr\{X \leq x_{1-\alpha}\} = F(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$. Crie uma tabela da densidade Qui-quadrado com graus de liberdade 1,2,3,..., 24, 25, 28, 30 e os percentis 1%, 2.5%, 5%, 10%, 50% (mediana), 90%, 95%, 97.5% e 99%.

Fique ligado

Se X é uma variável aleatória **qualquer** com média a e variância b^2 então a variável $\frac{X-a}{b}$ tem média zero e variância um. Em particular, **se X é Normal**, esta transformação nos leva a uma variável $N(0,1)$, a Normal padrão, cuja função de distribuição, denotada por $\Phi(\cdot)$, é uma função tabelada.

Se X_1, X_2, \dots, X_n são iid $N(\mu, \sigma^2)$ então \bar{X} , a média da amostra, também tem distribuição Normal com a mesma média (μ) mas com variância σ^2/n , que decresce à medida que o tamanho da amostra aumenta.

Problema 5

Uma montadora de automóveis, após muitos anos de observação, verificou que a quilometragem típica anual de um motorista brasileiro é uma variável aleatória Normal com média de 15000 km e desvio padrão 3500 km. A empresa decide oferecer, para os automóveis novos, garantia de 1 ano ou 30000 km de uso, o que ocorrer primeiro.

- a) Qual a probabilidade de um carro novo “rodar” mais de 30000 km no seu primeiro ano de uso?
 b) Suponha que a quilometragem típica anual é 15000 km, e que a probabilidade de um carro “rodar” mais de 25000 km é 5%. Qual o desvio padrão?

Solução

- a) Seja X a quilometragem de um carro com um ano de uso. Então, X é uma variável Normal com média 15000 km e desvio padrão 3500 km. Logo, a variável:

$$Z = \frac{X - 15000}{3500} \text{ tem distribuição } N(0,1). \text{ Assim:}$$

$$\Pr(X > 30000) = \Pr\left(\frac{X - 15000}{3500} > \frac{30000 - 15000}{3500}\right) = \Pr(Z > 4.28) = 0.0009\%$$

Logo, a probabilidade de um carro “rodar” mais de 30000 km em um ano é mínima.

- b) Neste caso supomos que a média é 15000 mas o desvio padrão é desconhecido. No entanto, sabemos que a quilometragem igual a 25000 corresponde ao percentil 95% da distribuição, e isso nos permitirá encontrar o desvio-padrão.

Note que, para uma distribuição $N(0,1)$, o percentil 95% é 1.645, ou seja, $\Phi(1.645) = \Pr(Z \leq 1.645) = 95\%$.

Mas, a distribuição da quilometragem pode ser padronizada para gerar uma $N(0,1)$ da seguinte forma:

$$Z = \frac{X - 15000}{\sigma}$$

Igualando os percentis 95% das distribuições de X e Z leva a:

$$1.645 = \frac{25000 - 15000}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{10000}{1.645} = 6079$$

Problema 6

A idade dos assinantes de um jornal é uma variável aleatória com densidade Normal com média 35.5 anos e desvio padrão 4.8 anos. Calcule as seguintes probabilidades:

- a) De que um assinante escolhido aleatoriamente tenha entre 30 e 40 anos;
 b) De que um assinante escolhido aleatoriamente tenha mais que 40 anos;
 c) Suponha que você toma uma amostra de 16 assinantes. Qual a probabilidade de que a idade média na amostra exceda 40 anos?

Solução

Neste caso X , a idade dos assinantes, é uma variável $N(35.5, (4.8)^2)$. Se quisermos criar uma variável padronizada $N(0,1)$ devemos subtrair a média de X e dividir o resultado pelo desvio padrão. Logo, a variável $Z = \frac{X - 35.5}{4.8}$ tem distribuição $N(0,1)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Pr(30 < X < 40) &= \\ \Pr\left(\frac{30-35.5}{4.8} < \frac{X-35.5}{4.8} < \frac{40-35.5}{4.8}\right) &= \Pr\left(\frac{30-35.5}{4.8} < \frac{X-35.5}{4.8} < \frac{40-35.5}{4.8}\right) = \\ &= \Pr(-1.1458 < Z < 0.9375) = \Phi(0.9375) - \Phi(-1.1458) = \Phi(0.9375) - \{1 - \Phi(1.1458)\} = \\ &= 0.8257 - 0.1259 = 69.98\% \end{aligned}$$

$$\text{b) } \Pr(X > 40) = \Pr\left(\frac{X-35.5}{4.8} > \frac{40-35.5}{4.8}\right) = 1 - \Phi(0.9375) = 17.43\%$$

- c) Considere agora uma amostra de 16 assinantes. A idade média dos assinantes na amostra é também uma variável Normal, com média 35.5 e variância $\frac{(4.8)^2}{16}$. Desejamos encontrar a probabilidade de \bar{X} , a idade média na amostra, exceder 40 anos. Então:

$$\Pr(\bar{X} > 40) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-35.5}{4.8/4} > \frac{40-35.5}{4.8/4}\right) = \Pr(Z > 3.75) = 0.01\%$$

Problema 7

A velocidade (em km/h) dos carros num túnel do Rio de Janeiro num horário de pouco movimento é uma variável Normal com média 85 km/h e desvio padrão 10 km/h.

- A que velocidade você deve trafegar para estar entre os 5% mais rápidos?
- A velocidade máxima permitida no túnel é 80 km/h, mas há uma tolerância de 10% (e então, se você estiver a uma velocidade menor ou igual a 88 km/h não leva multa). Qual a probabilidade de um carro selecionado aleatoriamente ser multado?
- Toma-se uma amostra de 10 carros. Calcule a probabilidade de que a velocidade média dos carros na amostra seja maior que 100 km/h.

Solução

- a) Seja X a velocidade de um carro no túnel. Sabe-se que X tem distribuição $N(85, 100)$. Para você estar entre os 5% mais rápidos, você deverá estar com velocidade acima do percentil 95% da distribuição de X. Mas, quem é este ponto? Basta olhar para o percentil correspondente da distribuição $N(0,1)$, que é 1.645 e padronizar a variável X. Assim, a quilometragem tal que, 95% dos carros andam abaixo deste valor é um certo u que satisfaz:

$$\frac{u-85}{10} = 1.645 \Rightarrow u = 101.45 \text{ km/h}$$

- b) Agora precisamos encontrar $\Pr(X > 88)$. Novamente, basta padronizar a variável X e transformá-la numa $N(0,1)$.

$$\Pr(X > 88) = \Pr\left(\frac{X-85}{10} > \frac{88-85}{10}\right) = \Pr(Z > 0.3) = 1 - \Phi(0.3) = 38.21\% \text{ é a probabilidade de um carro ser multado.}$$

- c) Numa amostra de 10 carros, a velocidade média é uma variável Normal com média 85 km/h e variância 10 (por que?).

$$\text{Então: } \Pr(\bar{X} > 100) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-85}{\sqrt{10}} > \frac{100-85}{\sqrt{10}}\right) = \Pr(Z > 4.7434) = 0.0001\% \text{ é a probabilidade da velocidade média na amostra ultrapassar 100 km/h.}$$

Problema 8

O consumo médio mensal de energia elétrica num certo bairro é aproximadamente uma variável aleatória Normal com média 180 kWh e desvio padrão 60 kWh. Calcule as seguintes probabilidades:

- De que um domicílio escolhido aleatoriamente tenha consumo médio mensal entre 150 e 250 kWh;
- De que um domicílio escolhido aleatoriamente tenha consumo médio mensal acima de 220 kWh;
- De que um domicílio escolhido aleatoriamente tenha consumo médio mensal abaixo de 100 kWh;
- De que um prédio com 20 apartamentos selecionado aleatoriamente no bairro tenha consumo médio mensal acima de 4000 kWh.

Solução

a) X, o consumo mensal de energia, é Normal com média 180 kWh e desvio padrão 60 kWh. Então:

$$\begin{aligned} \Pr(150 < X < 250) &= \Pr\left(\frac{150-180}{60} < \frac{X-180}{60} < \frac{250-180}{60}\right) = \Pr(-0.5 < Z < 0.5) = \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 = 38.29\% \end{aligned}$$

$$b) \Pr(X > 220) = \Pr\left(\frac{X-180}{60} > \frac{220-180}{60}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - 0.7475 = 25.25\%$$

$$c) \Pr(X < 100) = \Pr\left(\frac{X-180}{60} < \frac{100-180}{60}\right) = \Phi\left(\frac{-4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 9.12\%$$

Problema 9

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- Calcule a função geradora de momentos de X.
- Mostre que, se $X \sim N(0,1)$ então $Y = X^2$ tem densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade.
- Mostre que, se X e Y são iid $N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = X + Y$ tem densidade $N(2\mu, 2\sigma^2)$ (Dica : use a função geradora de momentos).
- Calcule a densidade condicional de X dado Z, onde Z foi definido no ítem c) acima.

Solução

a) Usamos diretamente a definição da função geradora de momentos, completando o quadrado na integral.

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[tx - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x - \mu)^2\right] dx$$

Para simplificar a notação, sejam $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ e $A = tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}$ respectivamente a constante e o expoente na

integral anterior. Para resolver esta integral precisamos reescrever o expoente A como o quadrado de uma variável, o que nos levará a uma integral da densidade Normal, cujo valor é 1 (se "acertarmos" as constantes).

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \left\{ -2\sigma^2 \cdot tx + x^2 - 2\mu \cdot x + \mu^2 \right\} \\ &= \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \left\{ x^2 - 2x(\mu + \sigma^2 \cdot t) + \mu^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \left\{ x - 2 \cdot x \cdot (\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 \cdot t)^2 - (\mu + \sigma^2 \cdot t)^2 + \mu^2 \right\} \\
&= \frac{-1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \left\{ \left(x - (\mu + \sigma^2 t) \right)^2 + \mu^2 - \left(\mu^2 + 2 \cdot \sigma^2 \cdot t \cdot \mu + \sigma^4 \cdot t^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

Seja $z = \left(x - (\mu + \sigma^2 t) \right)$. O expoente A torna-se:

$$A = \frac{-z^2}{2 \cdot \sigma^2} + t \cdot \sigma^2 + (\sigma^2 \cdot t^2) / 2$$

Mas, a variável de integração era x , e passou a ser z . Também, $dz = dx$, e a função geradora de momentos torna-se :

$$M(t) = \exp(\mu \cdot t + \sigma^2 t^2 / 2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \pi \cdot \sigma^2)^{-1/2} \cdot \exp(-z^2 / 2 \cdot \sigma^2) dz$$

Note que esta integral é uma integral da densidade $N(0, \sigma^2)$, e portanto resulta em 1. Logo, a função geradora de momentos é dada por :

$$M(t) = \exp \left\{ \mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}$$

b) Se X é $N(0,1)$ então a densidade de $Y = X^2$ pode ser encontrada pelo método da função de distribuição, como indicado no capítulo 4. Em particular sabemos que:

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left\{ f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right\} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-y}{2} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} \exp \left[\frac{-y}{2} \right]
\end{aligned}$$

que é a densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade (veja o problema 1 deste capítulo).

Problema 10

Sejam X_1, X_2, \dots, X_{25} e Y_1, Y_2, \dots, Y_{25} duas amostras aleatórias de duas distribuições Normais **independentes** onde $X_i \sim N(0, 16)$ e $Y_j \sim N(1, 9)$ para i e $j = 1, 2, \dots, 25$.

Sejam X e Y as respectivas médias amostrais. Calcule $\Pr(X > Y)$

Dica : X e Y são independentes.

Solução

Note que X , a média amostral da primeira amostra, tem distribuição Normal com média 0 e variância 16/25. Analogamente, Y , a média amostral da segunda amostra, é Normal com média 1 e variância 9/25. Além disso, X e Y são independentes e assim a variável $W = X - Y$ tem distribuição Normal com média $0 - 1 = -1$ e variância $16/25 + 9/25 = 1$.

Logo:

$$\begin{aligned}
\Pr(X > Y) &= \Pr(X - Y > 0) = \Pr(W > 0) = \\
&= \Pr \left(\frac{W - (-1)}{1} > \frac{0 - (-1)}{1} \right) = \Pr(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 15.87\%
\end{aligned}$$

Problema 11

Sejam X_1, X_2, \dots, X_8 independentes e identicamente distribuídas com densidade $N(2, 4)$. Calcule:

a) $\Pr(\bar{X} > 3)$

b) $\Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_8) > 3)$

c) $\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) < 1)$

Solução

a) A média amostral, \bar{X} , tem densidade Normal com média 2 e variância $4/8$. Então:

$$\Pr(\bar{X} > 3) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 2}{\sqrt{\frac{4}{8}}} > \frac{3 - 2}{\sqrt{\frac{4}{8}}}\right) = \Pr(Z > \sqrt{2}) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) = 7.86\%$$

b) Note que, se o máximo de um conjunto de observações é maior que um certo número, nada podemos dizer a respeito da relação entre cada observação e este número. No entanto, **se o máximo de uma amostra é menor que um certo número, todas as observações na amostra também serão menores que este número**. Podemos escrever a probabilidade desejada usando este resultado.

$\Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_8) > 3) = 1 - \Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_8) \leq 3) = 1 - \Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3, \dots, X_8 \leq 3)$ e como os X_i 's são independentes, esta última probabilidade pode ser reescrita como:

$$\Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3, \dots, X_8 \leq 3) = \Pr(X_1 \leq 3) \cdot \Pr(X_2 \leq 3) \dots \Pr(X_8 \leq 3)$$

Como os X_i 's são identicamente distribuídos, todas estas probabilidades são iguais, e então:

$$\Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3, \dots, X_8 \leq 3) = \{\Pr(X_1 \leq 3)\}^8$$

Mas:

$$\Pr(X_1 \leq 3) = \Pr\left(\frac{X_1 - 2}{\sqrt{4}} \leq \frac{3 - 2}{\sqrt{4}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915$$

Assim:

$$\Pr(X_1 \leq 3, X_2 \leq 3, \dots, X_8 \leq 3) = \{\Pr(X_1 \leq 3)\}^8 = \{0.6915\}^8 = 0.0523$$

E então:

$$\Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_8) > 3) = 1 - 0.0523 = 94.77\%$$

c) Queremos encontrar $\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) < 1)$. Note que, se o mínimo é menor que um, nada podemos dizer sobre cada um dos valores individuais, mas se o mínimo é maior que um, todos os valores são também maiores que um. Logo, a solução é análoga à do item anterior.

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) < 1) = 1 - \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) \geq 1)$$

Como os X_i 's são independentes segue que:

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) \geq 1) = \Pr(X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, \dots, X_8 \geq 1) = \Pr(X_1 \geq 1) \cdot \Pr(X_2 \geq 1) \dots \Pr(X_8 \geq 1)$$

Além disso, como os X_i 's são identicamente distribuídos, $\Pr(X_1 \geq 1) = \Pr(X_2 \geq 1) = \dots = \Pr(X_8 \geq 1)$

E então:

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) \geq 1) = \{\Pr(X_1 \geq 1)\}^8$$

$$\text{Mas, } \Pr(X_1 \geq 1) = \Pr\left(\frac{X_1 - 2}{\sqrt{4}} \geq \frac{1 - 2}{\sqrt{4}}\right) = \Pr\left(Z \geq \frac{-1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-1}{2}\right) = 0.6915$$

Assim,

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) \geq 1) = \{\Pr(X_1 \geq 1)\}^8 = \{0.6915\}^8 = 0.0523$$

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) < 1) = 1 - \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_8) \geq 1) = 1 - 0.0523 = 94.77\%$$

Problema 12

Seja X uma variável aleatória Normal com média 1 e variância 4. Considere uma nova variável aleatória T definida a seguir:

$$T = -1 \text{ se } X \leq 2$$

$$T = 0 \text{ se } -2 \leq X \leq 0$$

$$T = +1 \text{ se } X > 0$$

- Encontre a função de probabilidade de T (note que T é discreta !)
- Encontre o valor esperado de T usando a definição de valor esperado.
- Encontre a função geradora de momentos de T e, a partir dela, calcule $E(T)$ e confirme o resultado do item b). Calcule também $VAR(T)$.

Problema 13

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias iid (independentes e identicamente distribuídas), com distribuição $N(0,1)$. Sejam Y_1 e Y_2 novas variáveis aleatórias criadas a partir de transformações destas tais que:

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = X_1 - X_2$$

- Ache a densidade conjunta de X_1 e X_2 .
- Ache a densidade conjunta de Y_1 e Y_2 .
- Qual a marginal de Y_1 ?
- Qual a marginal de Y_2 ?
- Demonstre que Y_1 e Y_2 são independentes.

(Dica: As variáveis são Normais).

Problema 14

Um posto de gasolina recebe combustível apenas nas 2a. feiras. O distribuidor de combustível precisa saber qual a proporção do estoque vendido durante a semana. Após observar postos em condições similares, o distribuidor chegou à conclusão que a proporção do estoque de combustível neste posto pode ser modelada por uma densidade Beta(4,2). O distribuidor considera arriscado vender, numa semana, mais de 90% do estoque de combustível do posto. Qual a probabilidade disso acontecer?

Fique ligado

A Normal Bivariada é uma densidade que serve para modelar duas variáveis Normais, X_1 e X_2 , que apresentam dependência entre si.

Os pontos importantes, que você não pode esquecer, são:

- As densidades marginais de X_1 e X_2 são Normais,
- Se ρ , o coeficiente de correlação, for igual a zero, as variáveis X_1 e X_2 serão **independentes** (este é o único caso em que independência e correlação zero são equivalentes!)
- As densidades condicionais de X_1 dado X_2 e de X_2 dado X_1 também são Normais, e a seguir exibimos a média e variância da densidade condicional de X_2 dado X_1 :

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \cdot (x_1 - \mu_1)$$

Esta média condicional é uma função **linear** de x_1 .

$$\text{VAR}(X_2 | X_1 = x_1) = \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2)$$

A variância condicional é constante, não depende do valor da variável em que se está condicionando (neste caso, $X_1 = x_1$) e é menor que a variância incondicional, desde que o coeficiente de correlação (ρ) seja diferente de zero.

Os resultados para a densidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ são completamente análogos, basta trocar os índices 1 e 2 acima!

Problema 15

Uma população de estudantes universitários do sexo masculino tem uma distribuição de pesos e alturas que seguem uma distribuição Normal bivariada. A distribuição dos pesos tem média 72 kg e desvio padrão 8 kg. A distribuição das alturas tem média 170 cm e desvio padrão 10 cm. O coeficiente de correlação entre pesos e alturas é 0.8. Usando estas informações calcule:

- A probabilidade do peso de um rapaz estar entre 70 e 80 kg.
- A probabilidade do peso de um rapaz estar entre 70 e 80 kg dado que sua altura é 180 cm.
- A probabilidade da altura de um rapaz estar entre 175 e 185 cm.
- A probabilidade da altura de um rapaz estar entre 175 e 185 cm dado que seu peso é 80 kg.

Solução

Seja X_1 a variável que representa o peso de um rapaz, e X_2 a variável que indica a sua altura. Então $X_1 \sim N(72, 8^2)$ e $X_2 \sim N(170, 10^2)$. Nos itens a) e c) a seguir você deve usar apenas as densidades marginais.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Pr(70 < X_1 < 80) &= \Pr\left(\frac{70-72}{8} \leq \frac{X_1-72}{8} \leq \frac{80-72}{8}\right) = \Pr(-0.25 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.25) \\ &= 84.13\% - 40.13\% = 44\% \end{aligned}$$

b) Aqui é necessário calcular a densidade condicional de X_1 dado $X_2 = 180$ cm. Quem é esta densidade? Note que ela é também Normal, mas agora a média não é mais 72 kg, e sim:

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \mu_1 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) (x_2 - \mu_2) = 72 + 0.8 \left(\frac{8}{10}\right) (180 - 170) = 78.4$$

E a variância condicional é:

$$\text{VAR}(X_1 | X_2 = x_2) = \sigma_1^2 \cdot (1 - \rho^2) = 64(1 - 0.8^2) = 23.04$$

A probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned} \Pr(70 < X_1 < 80 | X_2 = 180) &= \\ \Pr\left(\frac{70-78.4}{\sqrt{23.04}} \leq \frac{X_1-78.4}{\sqrt{23.04}} \leq \frac{80-78.4}{\sqrt{23.04}}\right) &= \Pr(-1.75 \leq Z \leq 0.333) = \Phi(0.333) - \Phi(-1.75) = 59.05\% \end{aligned}$$

c) Aqui, da mesma forma que no item a), basta usar a densidade marginal.

$$\begin{aligned} \Pr(175 < X_2 < 185) &= \\ = \Pr\left(\frac{185-170}{10} \leq \frac{X_2-170}{10} \leq \frac{175-170}{10}\right) &= \Pr(0.5 \leq Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0.5) = \\ = 0.9332 - 0.6915 &= 24.17\% \end{aligned}$$

d) A densidade condicional da altura dado o peso é também uma densidade Normal, com média:

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \mu_2 + \rho \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) (x_1 - \mu_1) = 170 + 0.8 \left(\frac{10}{8} \right) (80 - 72) = 178$$

E variância:

$$VAR(X_2 | X_1 = x_1) = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) = 100(1 - 0.64) = 36$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned} \Pr(175 < X_2 < 185 | X_1 = 80) &= \Pr\left(\frac{175-178}{\sqrt{36}} < \frac{X_2-178}{\sqrt{36}} < \frac{185-178}{\sqrt{36}}\right) = \\ &= \Pr\left(-0.5 < Z < \frac{7}{6}\right) = \Phi\left(\frac{7}{6}\right) - \Phi(-0.5) = 0.8783 - 0.3085 = 56.98\% \end{aligned}$$

Ou seja, a probabilidade de um rapaz ter altura entre 1.75 e 1.85 m é bem maior se ele é relativamente pesado (80 kg) do que na população em geral.

Problema 16

As notas em duas provas de estatística têm uma distribuição Normal bivariada onde o coeficiente de correlação é $\rho = 0.6$. A distribuição das notas da P1 tem média 63 e desvio padrão 8. A distribuição das notas da P2 tem média 60 e desvio padrão 12. Calcule:

- A probabilidade da nota da P1 de um aluno estar entre 59 e 67.
- A probabilidade da nota da P1 de um aluno estar entre 59 e 67 dado que a sua nota na P2 foi 65.
- A probabilidade da nota da P2 estar entre 55 e 65.
- A probabilidade da nota da P2 estar entre 55 e 65 dado que sua nota na P1 foi 65.
- A probabilidade da nota da P2 estar entre 55 e 65 dado que sua nota na P1 foi 75.
- Supondo que as notas da P1 de cada aluno são independentes e identicamente distribuídas com a distribuição Normal já indicada, e sabendo que existem 20 alunos na turma, calcule a probabilidade de que a nota mínima na P1 seja menor que 55.

Solução

Seja X_1 a nota na P1 e X_2 a nota da P2. Pelo enunciado, $X_1 \sim N(63, 8^2)$ e $X_2 \sim N(60, 12^2)$.

a) Neste caso basta usar a densidade marginal, pois precisamos calcular uma probabilidade que só envolve a nota da primeira prova.

$$\begin{aligned} \Pr(59 < X_1 < 67) &= \Pr\left(\frac{59-63}{8} \leq \frac{X_1-63}{8} \leq \frac{67-63}{8}\right) = \Pr(-0.5 \leq Z \leq 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \\ &= 0.6915 - 0.3085 = 38.29\% \end{aligned}$$

b) Agora precisamos da densidade condicional das notas da 1ª. prova dado que a nota na 2ª. prova foi 65, isto é, uma nota ligeiramente acima da média. A densidade condicional é Normal, e sua média é:

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \mu_1 + \rho \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) (x_2 - \mu_2) = 63 + 0.6 \left(\frac{8}{12} \right) (65 - 60) = 65$$

E a variância condicional é:

$$VAR(X_1 | X_2 = x_2) = \sigma_1^2 (1 - \rho^2) = 64(1 - 0.6^2) = 40.96$$

$$\begin{aligned} \Pr(59 < X_1 < 67 | X_2 = 65) &= \Pr\left(\frac{59-65}{\sqrt{40.96}} \leq \frac{X_1-65}{\sqrt{40.96}} \leq \frac{67-65}{\sqrt{40.96}}\right) = \\ &= \Pr(-0.9375 \leq Z \leq 0.3125) = \Phi(0.3125) - \Phi(-0.9375) = 44.84\% \end{aligned}$$

c) Agora a probabilidade procurada refere-se apenas à 2a. prova, e portanto basta usar a densidade marginal das notas desta prova, que é uma $N(60, 12^2)$.

$$\begin{aligned} \Pr(55 < X_2 < 65) &= \\ &= \Pr\left(\frac{55-60}{12} \leq \frac{X_1-60}{12} \leq \frac{65-60}{12}\right) = \Pr\left(-\frac{5}{12} \leq Z \leq \frac{5}{12}\right) = \Phi\left(\frac{5}{12}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{12}\right) = 32.31\% \end{aligned}$$

d) Precisamos calcular a probabilidade da nota da P2 estar entre 55 e 65 dado que a nota na P1 foi 65, que é uma probabilidade calculada a partir da densidade condicional, que é Normal com média:

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)(x_1 - \mu_1) = 60 + 0.6 \left(\frac{12}{8}\right)(65 - 63) = 61.8$$

E variância:

$$\text{VAR}(X_2 | X_1 = x_1) = \sigma_2^2 \cdot (1 - \rho^2) = 144(1 - 0.36) = 92.16$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned} \Pr(55 < X_2 < 65 | X_1 = 65) &= \Pr\left(\frac{55-61.8}{\sqrt{92.16}} \leq \frac{X_2-61.8}{\sqrt{92.16}} \leq \frac{65-61.8}{\sqrt{92.16}}\right) = \\ &= \Pr(-0.7083 \leq Z \leq 0.3333) = \Phi(0.3333) - \Phi(-0.7083) = 39.12\% \end{aligned}$$

e) Precisamos calcular a probabilidade da nota da P2 estar entre 55 e 65 dado que a nota na P1 foi 75, que é uma probabilidade calculada a partir da densidade condicional, que é Normal com a mesma variância que no item anterior mas com média dada por:

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \mu_2 + \rho \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)(x_1 - \mu_1) = 60 + 0.6 \left(\frac{12}{8}\right)(75 - 63) = 70.8$$

$$\begin{aligned} \Pr(55 < X_2 < 65 | X_1 = 75) &= \Pr\left(\frac{55-70.8}{\sqrt{92.16}} \leq \frac{X_2-70.8}{\sqrt{92.16}} \leq \frac{65-70.8}{\sqrt{92.16}}\right) = \\ &= \Pr(-1.6458 \leq Z \leq -0.6042) = \Phi(-0.6042) - \Phi(-1.6458) = 22.30\% \end{aligned}$$

f) A solução deste item segue os mesmos passos do problema 11, item c).

Precisamos encontrar $\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_{20}) < 55) = 1 - \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_{20}) \geq 55) = 1 - \{\Pr(X_1 \geq 55)\}^{20}$

Mas,

$$\Pr(X_1 \geq 55) = \Pr\left(\frac{X_1 - 63}{8} \geq \frac{55 - 63}{8}\right) = \Pr(Z \geq -1) = 1 - \Phi(-1) = 84.13\%$$

Então:

$$\Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_{20}) < 55) = 1 - \{\Pr(X_1 \geq 55)\}^{20} = 1 - (0.8413)^{20} = 96.84\%$$

Problema 17

Considere uma amostra de tamanho $n > 3$ da densidade Uniforme(0,1).

Calcule, como função do tamanho da amostra, as seguintes probabilidades:

- De que o maior número na amostra exceda 0.8;
- De que o menor número na amostra seja menor que 0.2.
- Faça um gráfico das probabilidades nos itens a) e b) versus n .

Solução

A densidade de cada X_i é Uniforme(0,1).

Pelos mesmos argumentos que no problema 11 acima:

$$a) \Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0.8) = 1 - \Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0.8) = 1 - \{\Pr(X_1 \leq 0.8)\}^n$$

Mas:

$$\Pr(X_1 \leq 0.8) = \int_0^{0.8} dx = 0.8$$

E então:

$$\Pr(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0.8) = 1 - \{0.8\}^n$$

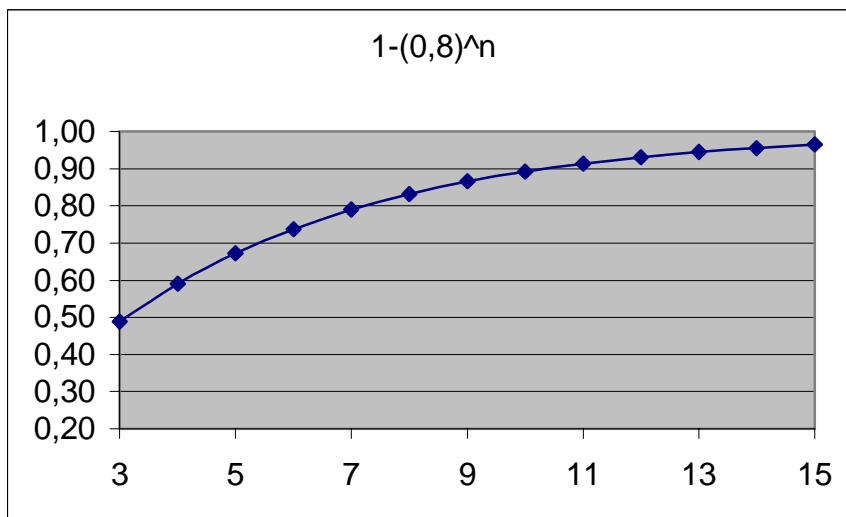
$$b) \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0.2) = 1 - \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0.2) = 1 - \{\Pr(X_1 \geq 0.2)\}^n$$

Mas:

$$\Pr(X_1 \geq 0.2) = \int_{0.2}^1 dx = 0.8$$

$$\text{Logo: } \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0.2) = 1 - \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0.2) = 1 - \{0.8\}^n$$

Portanto, neste caso, como função de n , as probabilidades dos itens a) e b) são iguais, e o gráfico é mostrado a seguir:



Problema 18

(Simulação de variáveis com densidade Exponencial)

Seja U uma variável aleatória com densidade Uniforme(0,1). Então a variável:

$$X = \frac{-1}{\lambda} \log\{U\}$$

tem densidade Exponencial com média $1/\lambda$.

Aqui, \log indica o logaritmo natural.

- Use este procedimento para gerar 100 observações de uma densidade Exponencial com média 1000.
- Calcule a probabilidade de uma variável aleatória X com esta densidade Exponencial ser menor que 720.
- Suponha que os dados gerados em a) representam a duração (em horas) de uma lâmpada. Aproxime a probabilidade encontrada em b) usando os dados gerados (na verdade você vai estar interessado em encontrar o percentil correspondente da distribuição de probabilidade empírica).

Problema 19

A duração de certos componentes eletrônicos é uma variável aleatória com densidade Exponencial com média 100 horas.

- Suponha que um sistema é formado por dois destes componentes operando **em série**, ou seja, o sistema falha se um dos componentes falhar. Encontre a densidade de X , a duração média do sistema.
- Agora suponha que o sistema opera **em paralelo**, isto é, o sistema só falha se os dois componentes falharem. Ache a densidade de Y , a duração média do sistema.

Problema 20**(Geração de Normais a partir da Uniforme)**

Uma maneira fácil de gerar variáveis aproximadamente Normais é a partir da soma de variáveis Uniforme(0,1). Na verdade, o algoritmo descrito a seguir era empregado para a geração de $N(0,1)$ até relativamente pouco tempo atrás, quando ainda era computacionalmente “caro” gerar variáveis Normais por outros métodos.

Sejam U_1, U_2, \dots, U_{12} variáveis aleatórias iid com densidade Uniforme(0,1). Então cada U_i tem média $1/2$ e variância $1/12$.

$$T = \sum_{i=1}^{12} U_i$$

Seja

T é uma variável aleatória com média 6 e variância $12/12 = 1$. Considere então a variável $W = T - 6$. W é uma variável aleatória com média 0 e variância 1, e é aproximadamente Normal.

- Utilizando este procedimento, gere 150 realizações de uma variável $N(0,1)$.
- Faça um histograma das observações geradas em a), e superponha a ele uma densidade $N(0,1)$.
- Divida a amostra gerada no item a) em 2 partes com 75 observações cada. A partir das observações na primeira parte, construa uma amostra de variáveis Normais com média 1 e variância 4 a partir de uma transformação linear da amostra $N(0,1)$ gerada originalmente. Usando uma outra transformação linear, construa a partir da 2a. parte da amostra uma amostra de 75 observações da densidade Normal com média -1 e variância 9. Faça o histograma das 2 distribuições geradas, superpondo a eles os gráficos das distribuições teóricas ($N(1,4)$ e $N(-1,9)$ respectivamente).

Atenção: Não ordene as 150 observações geradas no item a) antes de dividir a amostra em duas partes, para evitar que uma metade da amostra só contenha observações “pequenas” e a outra metade inclua apenas as observações “grandes”.

d) A **função de distribuição empírica** $F_n(x)$ é calculada a partir de uma amostra qualquer da seguinte maneira:

1) ordene as n observações da sua amostra em ordem crescente;

2) para cada valor observado na amostra, isto é, para x_1, x_2, \dots, x_n , a função de distribuição empírica é $F_n(x) = \{\text{número de valores observados} \leq x\}/n$. Logo, para qualquer x abaixo do menor valor na amostra, $F_n(x)$ é zero, e para x maior que o máximo da amostra, o valor de $F_n(x)$ é 1.

Usando os dados gerados em a) faça um gráfico da função de distribuição empírica. Superponha a este gráfico a função de distribuição da $N(0,1)$, $\Phi(x)$, que é calculada automaticamente em diversos softwares, inclusive o Excel.

Fique ligado**Relação entre a densidade Uniforme e a densidade Beta**

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com densidade Unif(0,1). Seja Y_r o r -ésimo maior número dentre os valores observados de X_1, X_2, \dots, X_n . Então Y_r tem densidade Beta com parâmetros r e $n - r + 1$.

Então, em particular:

- o mínimo de X_1, X_2, \dots, X_n tem densidade Beta(1, n) e sua média é $1/(n+1)$
- o máximo de X_1, X_2, \dots, X_n tem densidade Beta(n , 1) e sua média é $n/(n+1)$

Problema 21

Um computador gera 6 números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo (0,1).

- Calcule a probabilidade de que o menor destes números será maior que 0.2.
- Calcule o valor esperado do menor destes números.
- Encontre a densidade do 2o. menor destes números e calcule a sua média e variância.
- Calcule a probabilidade de que o maior destes números exceda 0.6.

Solução

Veja os problemas 11 e 17. Aqui, como no problema 11, os números são distribuídos de acordo com uma Uniforme(0,1).

$$a) \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_6) > 0.2) = \{\Pr(X_1 > 0.2)\}^6$$

Mas:

$$\Pr(X_1 \geq 0.2) = \int_{0.2}^1 dx = 0.8$$

$$\text{Logo: } \Pr(\min(X_1, X_2, \dots, X_6) > 0.2) = \{0.8\}^6 = 26.21\%$$

b) Neste caso, $\min(X_1, X_2, \dots, X_6)$ é uma variável aleatória com densidade Beta(1,6) e sua média é 1/7.

c) O segundo menor dentre X_1, X_2, \dots, X_6 tem densidade Beta(2, 5) e então sua média é 2/7 e sua variância é

$$\frac{2(5)}{(2+5+1)(2+5)^2} = \frac{10}{8(49)} = 0.0255$$

d) Seja W o maior dentre X_1, X_2, \dots, X_6 . Então W tem densidade Beta(6, 1) e assim:

$$\Pr(W > 0.6) = \int_{0.6}^1 \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(6)\Gamma(1)} w^{6-1} (1-w)^{1-1} dw = \int_{0.6}^1 6w^5 dw = w^6 \Big|_{0.6}^1 = 1 - (0.6)^6 = 95.33\%$$

Problema 22

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Determine c (como função de μ e σ) tal que:

$$\Pr(X < c) = 2 \cdot \Pr(X > c).$$

Problema 23

Sejam X e Y independentes, ambas com densidade $N(\mu, \sigma^2)$.

Defina $Z(t) = X \cdot \cos(wt) + Y \cdot \sin(wt)$ onde w é uma constante e t é um índice de tempo. Seja $V(t) = dZ(t)/dt$.

- Para um instante de tempo fixado (t), encontre a distribuição conjunta de Z(t) e V(t).
- Mostre que Z(t) e V(t) São decorrelatados.

Problema 24

Uma variável aleatória contínua tem distribuição de Pareto com parâmetros α e c (onde α e c são constantes positivas) se a sua densidade é:

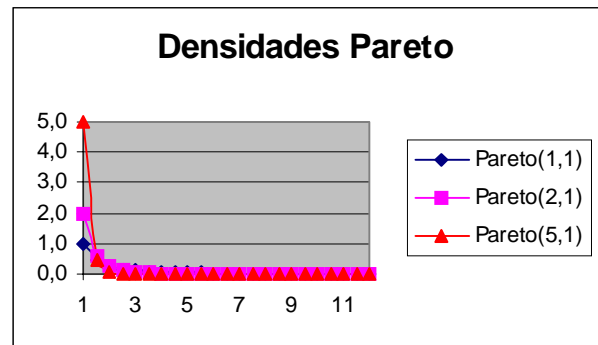
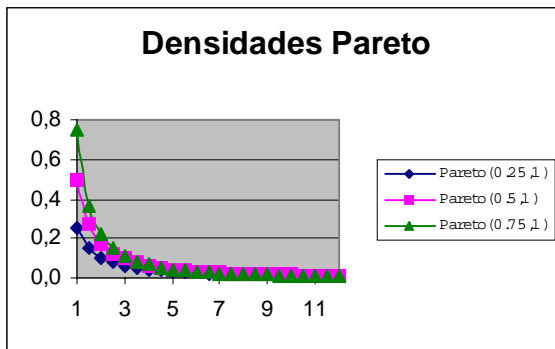
$$f(x) = \frac{\alpha \cdot c^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ para } x \geq c$$

- Suponha que $c = 1$. Faça o gráfico da densidade Pareto para $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 5$.
- Calcule $\Pr(X < 2)$ em todas as situações do item a).
- Mostre que, se X tem distribuição Pareto, então $Y = \log(X/c)$ tem distribuição Exponencial com parâmetro α .

Solução

a) As densidades desejadas têm a forma:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ onde } x \geq 1.$$



$$b) \Pr(X < 2) = \int_1^2 \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{x^{-\alpha-1+1}}{-\alpha-1+1} \Big|_1^2 = \frac{-1}{\alpha(x)^\alpha} \Big|_1^2 = \frac{-1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{2^\alpha} - 1 \right\} = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 - \frac{1}{2^\alpha} \right\}$$

A tabela a seguir fornece estas probabilidades para os diversos valores de α .

α	probabilidade
0,25	63,64%
0,50	58,58%
0,75	54,05%
1,00	50,00%
2,00	37,50%
5,00	19,38%

c) Use o método do Jacobiano.

$$Y = \log(X/c) \Rightarrow e^Y = X/c \Rightarrow X = c \cdot e^Y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = c \cdot e^y$$

Quando x tende a c , y tende a zero, e quando x tende a $+\infty$, y também vai para $+\infty$.

A densidade de Y é:

$$g(y) = \frac{\alpha \cdot c^\alpha}{(c \cdot e^y)^{\alpha+1}} \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{\alpha \cdot c^\alpha}{(c \cdot e^y)^{\alpha+1}} \cdot c \cdot e^y = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot y} \text{ onde } y > 0 \text{ e portanto } Y \text{ tem densidade Exponencial com}$$

média $(1/\alpha)$

Problema 25

Suponha que X tem distribuição Beta com parâmetros a e b . Mostre que $Y = 1 - X$ tem distribuição Beta com parâmetros b e a .

Problema 26

Sejam X e Y independentes, ambos com densidade Exponencial(β). Mostre que a variável $Z = X/(X+Y)$ tem densidade Uniforme no intervalo $(0,1)$.