

Soluções - Capítulo 8

Lista – semestre 2000.02 = 1 a 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17 – Os exercícios 1, 4, 8 foram feitos em aula

Fique ligado

O Teorema Central do Limite é importante porque nos diz que somas (e médias) de quaisquer variáveis aleatórias são aproximadamente Normais. As condições necessárias para que isso aconteça são:

- A média das variáveis que estão sendo somadas existe;
- A variância das variáveis que estão sendo somadas existe;
- Usa-se um número “razoavelmente grande” de termos na soma, em geral $n = 20$ ou 30 é mais do que suficiente.

A qualidade da aproximação dependerá de alguns fatores, por exemplo:

- Se a distribuição dos X_i 's é muito assimétrica, pode ser necessário somar mais termos (ou seja, aumentar n) para encontrar uma aproximação boa em termos numéricos.

O Teorema de DeMoivre e Laplace é apenas um caso particular do Teorema Central do Limite, no qual as variáveis que estão sendo somadas são independentes e identicamente distribuídas Bernoulli(p). Note que, a distribuição **exata** da soma destas Bernoullis é uma Binomial com parâmetros n e p (e portanto tem média $n.p$ e variância $n.p.q$). A aplicação do Teorema de DeMoivre e Laplace pressupõe que a distribuição Normal é uma boa aproximação para esta distribuição Binomial, o que ocorre quando:

- n é “grande” (ou seja, o número de repetições das tentativas de Bernoulli é “grande”);
- $n.p$ não é muito pequeno (por exemplo, $n.p > 5$). Esta condição serve para garantir que a aproximação feita através da distribuição Normal é melhor que a aproximação feita usando a distribuição Poisson (que deve ser usada quando n é grande e p é pequeno, de tal forma que, $n.p < 5$).

A correção de continuidade mostrada na tabela a seguir serve para melhorar o resultado numérico da aproximação da Binomial pela Normal, e decorre do fato da distribuição Binomial ser discreta e da Normal ser contínua. Na verdade, se não utilizássemos esta correção de continuidade seria impossível calcular $\Pr(Y = k)$ através da aproximação, pois o resultado seria sempre zero ao empregarmos a Normal (por que?).

Tabela – correção de continuidade

| Quantidade desejada na distribuição Binomial | Quantidade Calculada através da correção de continuidade | Expressão aproximada usando a densidade Normal |
|--|--|---|
| $\Pr(Y = y)$ | $\Pr(y - 0.5 \leq Y \leq y + 0.5)$ | $\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |
| $\Pr(Y \leq y)$ | $\Pr(Y \leq y + 0.5)$ | $\Phi\left(\frac{y + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |
| $\Pr(Y < y) = \Pr(Y \leq y - 1)$ | $\Pr(Y \leq y - 1 + 0.5)$ | $\Phi\left(\frac{y - 1 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |
| $\Pr(Y \geq y)$ | $\Pr(Y \geq y - 0.5)$ | $1 - \Phi\left(\frac{y - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |
| $\Pr(Y > y) = \Pr(Y \geq y + 1)$ | $\Pr(Y \geq y + 1 - 0.5)$ | $1 - \Phi\left(\frac{y + 1 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |

| | | |
|------------------------|------------------------------------|---|
| $\Pr(a \leq Y \leq b)$ | $\Pr(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$ | $\Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ |
|------------------------|------------------------------------|---|

Problema 1

Um computador, ao adicionar números, arredonda cada número para o inteiro mais próximo. Suponha que os erros de arredondamento são independentes e identicamente distribuídos com densidade Uniforme no intervalo $(-0.5, +0.5)$.

Suponha que 144 números são somados. Qual a probabilidade de que o **módulo** da soma dos erros ultrapasse 2 ?

Dica 1: Use o teorema central do limite. Qual é a média e a variância de cada um dos 144 erros de arredondamento?

Dica 2 : $\Phi(1/\sqrt{3}) = \Phi(0.577) = 0.7180$

Solução

Seja $e_i \sim \text{Unif}(-0.5, +0.5)$ o i -ésimo erro de arredondamento. Então $E(e_i) = 0$ e $\text{VAR}(e_i) = 1/12$

Seja Y o resultado total dos arredondamentos, isto é: $Y = \sum_{i=1}^{144} e_i$. Então Y é uma variável aleatória com uma distribuição

complicada, mas sua média e variância são fáceis de calcular. $E(Y) = 0$ e $\text{VAR}(Y) = 144(1/12) = 12$.

Pelo Teorema Central do Limite, a densidade da variável: $\frac{Y-0}{\sqrt{12}}$ é aproximadamente $N(0,1)$.

Queremos calcular $\Pr(|Y| > 2)$.

Note que: $\Pr(|Y| > 2) = \Pr\left(\left|\frac{Y-0}{\sqrt{12}}\right| > \frac{2-0}{\sqrt{12}}\right) = \Pr\left(|Z| > \frac{2}{2\sqrt{3}}\right)$ onde Z é $N(0,1)$. Pela simetria da densidade $N(0,1)$, esta

última probabilidade é igual a $2\left\{1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = 2\{1 - 0.7180\} = 56.4\%$

Problema 2

Numa certa empresa de informática, o salário anual médio dos funcionários com menos de 5 anos de experiência é R\$ 20000, com desvio padrão de R\$ 1800. Toma-se uma amostra de 30 funcionários com menos de 5 anos de experiência. Qual a probabilidade do salário médio na amostra exceder R\$ 21000 ?

Solução

Sejam X_1, X_2, \dots, X_{30} os salários anuais dos funcionários com menos de 5 anos de experiência. O salário médio na amostra, denotado por \bar{X} , tem média R\$ 20000/ano e variância $(1800)^2/30$. Além disso, pelo teorema central do limite, \bar{X} , quando padronizado, é aproximadamente Normal(0,1). Assim:

$$\Pr(\bar{X} > 21000) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - 20000}{\sqrt{\frac{(1800)^2}{30}}} > \frac{21000 - 20000}{\sqrt{\frac{(1800)^2}{30}}}\right) \approx \Pr(Z > 3.0429) = 0.12\%$$

Problema 3

O saldo devedor médio dos usuários de um certo cartão de crédito é uma variável aleatória com média R\$ 112 e desvio padrão R\$ 56. Toma-se uma amostra de 50 portadores do cartão. Qual a probabilidade do saldo devedor médio na amostra estar entre R\$ 100 e R\$ 130?

Solução

Pelo teorema central do limite, o saldo devedor médio na amostra é aproximadamente Normal com média R\$ 112 e variância $(56)^2/50$. Então:

$$\Pr(100 < \bar{X} < 130) = \Pr\left(\frac{100-112}{\sqrt{\frac{(56)^2}{50}}} < \frac{\bar{X}-112}{\sqrt{\frac{(56)^2}{50}}} < \frac{130-112}{\sqrt{\frac{(56)^2}{50}}}\right) = \Pr(-1.5152 < Z < 2.2728) =$$

$$= \Phi(2.2728) - \Phi(-1.5152) = 98.85\% - 6.49\% = 92.36\%$$

Problema 4

Um elevador pode transportar até 12 passageiros. O peso de cada passageiro é uma variável aleatória com média 75 kg e desvio padrão 8.5 kg. Normas de segurança estabelecem que o peso máximo transportado no elevador não pode exceder 910 kg mais de 5% do tempo.

- a) Qual a probabilidade de que o peso total dos passageiros exceda 910 kg?
 b) Encontre o percentil 95% da distribuição do peso total dos passageiros do elevador. As normas de segurança estão sendo obedecidas ?

Solução

Seja T o peso total dos 12 passageiros. Então T é uma variável aleatória com média $E(T) = 75(12) = 900$ kg e variância $VAR(T) = 12(8.5)^2 = 867$.

Pelo teorema central do limite, a variável $\frac{T-900}{\sqrt{867}}$ tem aproximadamente uma distribuição $N(0,1)$.

a) Precisamos calcular:

$$\Pr(T > 910) = \Pr\left(\frac{T-900}{\sqrt{867}} > \frac{910-900}{\sqrt{867}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{910-900}{\sqrt{867}}\right) = 1 - \Phi(0.3396) = 1 - 0.6329 = 36.71\%$$

b) Precisamos encontrar um certo valor t tal que: $\Pr(T > t) = 5\%$ (ou, alternativamente, $\Pr(T \leq t) = 95\%$).

$$\Pr(T > t) = \Pr\left(\frac{T-900}{\sqrt{867}} > \frac{t-900}{\sqrt{867}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{t-900}{\sqrt{867}}\right) = 5\% \Rightarrow \Phi\left(\frac{t-900}{\sqrt{867}}\right) = 95\%$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t-900}{\sqrt{867}}\right) = 1.645 \Rightarrow t = 948.44 \text{ kg}$$

Logo, as normas de segurança estão sendo freqüentemente violadas por este elevador que só pode carregar com segurança 910 kg.

Problema 5

Compare a função de distribuição Poisson(λ) real e a obtida pela aproximação Normal quando $\lambda = 10, 20$ e 40 .

Solução

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $E(X) = \lambda$ e $VAR(X) = \lambda$. Também, X pode ser encarado como a soma de n variáveis Poisson independentes e identicamente distribuídas, cada uma com distribuição Poisson com média λ/n . Logo, se n (tamanho da amostra) é grande, então X (quando padronizado) é aproximadamente $N(0,1)$.

A função de distribuição verdadeira de X é:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^k}{k!}$$

A função de distribuição aproximada pela Normal é:

$$G(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

A seguir exibimos a tabela com alguns valores de x e sua função de distribuição real e aproximada e o erro percentual da aproximação para as distribuições Poisson(10), Poisson(20) e Poisson(40).

| x | Poisson(10) real | Poisson(10) aproximada | Erro % da aproximação |
|----|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1 | 0,05% | 0,22% | 343,20% |
| 2 | 0,28% | 0,57% | 106,04% |
| 3 | 1,03% | 1,34% | 29,92% |
| 4 | 2,93% | 2,89% | 1,24% |
| 5 | 6,71% | 5,69% | 15,15% |
| 6 | 13,01% | 10,30% | 20,89% |
| 7 | 22,02% | 17,14% | 22,17% |
| 8 | 33,28% | 26,35% | 20,81% |
| 9 | 45,79% | 37,59% | 17,91% |
| 10 | 58,30% | 50,00% | 14,24% |
| 12 | 79,16% | 73,65% | 6,96% |
| 14 | 91,65% | 89,70% | 2,13% |
| 16 | 97,30% | 97,11% | 0,19% |
| 18 | 99,28% | 99,43% | 0,15% |
| 20 | 99,84% | 99,92% | 0,08% |
| 25 | 100,00% | 100,00% | 0,00% |
| 30 | 100,00% | 100,00% | 0,00% |

| x | Poisson(20) real | Poisson(20) aproximada | Erro % da aproximação |
|----|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 3 | 0,00% | 0,01% | 2147,05% |
| 4 | 0,00% | 0,02% | 923,02% |
| 5 | 0,01% | 0,04% | 453,71% |
| 6 | 0,03% | 0,09% | 242,04% |
| 7 | 0,08% | 0,18% | 134,43% |
| 8 | 0,21% | 0,36% | 74,64% |
| 9 | 0,50% | 0,70% | 39,19% |
| 10 | 1,08% | 1,27% | 17,22% |
| 12 | 3,90% | 3,68% | 5,62% |
| 14 | 10,49% | 8,99% | 14,31% |
| 16 | 22,11% | 18,55% | 16,07% |
| 18 | 38,14% | 32,74% | 14,17% |
| 20 | 55,91% | 50,00% | 10,57% |
| 25 | 88,78% | 86,82% | 2,21% |
| 30 | 98,65% | 98,73% | 0,08% |
| 35 | 99,92% | 99,96% | 0,04% |
| 40 | 100,00% | 100,00% | 0,00% |

| x | Poisson(40) real | Poisson(40) aproximada | Erro % da aproximação |
|---|---------------------|---------------------------|--------------------------|
|---|---------------------|---------------------------|--------------------------|

| | | | |
|----|--------|--------|----------|
| 10 | 0,00% | 0,00% | 6393,02% |
| 15 | 0,00% | 0,00% | 607,00% |
| 20 | 0,04% | 0,08% | 112,53% |
| 25 | 0,76% | 0,89% | 17,00% |
| 30 | 6,17% | 5,69% | 7,73% |
| 32 | 11,53% | 10,30% | 10,71% |
| 34 | 19,39% | 17,14% | 11,60% |
| 36 | 29,63% | 26,35% | 11,07% |
| 38 | 41,60% | 37,59% | 9,64% |
| 40 | 54,19% | 50,00% | 7,74% |
| 42 | 66,18% | 62,41% | 5,70% |
| 44 | 76,57% | 73,65% | 3,82% |
| 46 | 84,79% | 82,86% | 2,27% |
| 48 | 90,75% | 89,70% | 1,16% |
| 50 | 94,74% | 94,31% | 0,45% |
| 52 | 97,19% | 97,11% | 0,09% |
| 54 | 98,60% | 98,66% | 0,06% |

Problema 6

Seja $Y \sim \text{Bin}(12, 1/2)$.

- Calcule $\Pr(Y \geq 9)$ exatamente.
- Calcule $\Pr(Y \geq 9)$ aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace **com** correção de continuidade.
- Calcule $\Pr(Y = 7)$ exatamente.
- Calcule $\Pr(Y = 7)$ aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace **com** correção de continuidade.

Problema 7

A probabilidade de uma pessoa com mais de 65 anos pegar uma gripe no outono é 75%. Toma-se uma amostra de 60 pessoas na "3a. idade" e seja X o número destas pessoas com gripe na amostra. Calcule as seguintes probabilidades:

- $\Pr\{X \geq 40\}$ aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace **com** correção de continuidade.
- $\Pr\{X \geq 40\}$ exatamente (só se você tiver acesso a um computador, pois do contrário será bastante trabalhoso!)
- $\Pr\{45 \leq X \leq 50\}$ aproximadamente pelo teorema de DeMoivre e Laplace **com** correção de continuidade.

Solução

- O número de pessoas de 3ª. idade com gripe na amostra é uma variável Binomial com parâmetros $n = 60$ e $p = 75\%$.

Pelo Teorema de DeMoivre e Laplace:

$$\frac{X - n.p}{\sqrt{n.p.q}} = \frac{X - 60(0.75)}{\sqrt{60(0.75)(0.25)}} \text{ é aproximadamente } N(0,1).$$

Logo, a probabilidade de X ser maior ou igual a 40 é aproximadamente (**sem** correção de continuidade):

$$\Pr(X \geq 40) = \Pr(Z \geq -1.4907) = 93.20\%$$

A probabilidade aproximada **usando a correção de continuidade** é:

$$\Pr(X \geq 39.5) = \Pr(Z \geq -1.6398) = 94.95\%$$

- A probabilidade exata, calculada a partir da distribuição Binomial com $n = 60$ e $p = 75\%$ é:

$$\Pr(X \geq 40) = \sum_{x=40}^{60} \binom{60}{x} (0.75)^x (0.25)^{60-x} = 1 - \Pr(X \leq 39) = 94.59\%$$

- A probabilidade aproximada usando a correção de continuidade é:

$$\begin{aligned} \Pr(45 \leq X \leq 55) &\approx \Phi\left(\frac{55 + 0.5 - (60)(0.75)}{\sqrt{(60)(0.75)(0.25)}}\right) - \Phi\left(\frac{45 - 0.5 - (60)(0.75)}{\sqrt{(60)(0.75)(0.25)}}\right) \\ &= \Phi(3.1305) - \Phi(-0.1491) = 99.91\% - 44.07\% = 55.84\% \end{aligned}$$

Problema 8

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n iid $N(0, \sigma^2)$.

- Qual a média e variância de X_i^2 ?
- Como aproximar $\Pr\{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \leq x\}$ em termos de $\Phi(\cdot)$?

Problema 9

Seja X uma variável aleatória Qui-quadrado com 50 graus de liberdade.

Aproxime $\Pr(40 \leq X \leq 60)$.

Solução

X pode ser encarado como a soma de 50 variáveis independentes e identicamente distribuídas com densidade Qui-quadrado com 1 grau de liberdade, e então podemos aplicar o teorema central do limite para aproximar probabilidades envolvendo X . Note que a média de X é 50 e sua variância é 100.

Pelo teorema central do limite, a variável:

$$\frac{X - 50}{\sqrt{100}} \text{ é aproximadamente } N(0,1).$$

Assim, a probabilidade desejada pode ser aproximada como;

$$\begin{aligned} \Pr(40 \leq X \leq 60) &= \Pr\left(\frac{40 - 50}{\sqrt{100}} \leq \frac{X - 50}{\sqrt{100}} \leq \frac{60 - 50}{\sqrt{100}}\right) \approx \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 84.13\% - 15.87\% = 68.27\% \end{aligned}$$

A título de comparação, o valor exato desta probabilidade é: 68.60%, e a aproximação é bastante boa neste caso.

Problema 10

Você joga R\$ 5 em cada repetição independente de um jogo no qual a probabilidade de ganhar é 50%. Use o Teorema Central do Limite para aproximar a probabilidade de que, após 50 jogadas, você terá perdido mais de R\$75.

Problema 11 (Há algo ERRADO – a distribuição não tem média, não podemos aplicar o TCL!!!!)

Seja $f(x) = 1/x^2$ onde $x > 1$. Considere uma amostra aleatória de tamanho 72 desta densidade e calcule aproximadamente a probabilidade de que mais do que 50 itens na amostra sejam menores que 3.

Solução

A média de X é:

$$E(X) = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_1^{\infty}$$

A média é infinita – não podemos aplicar o teorema central do limite.

Problema 12

Seja $f(x) = 2x$ se $0 \leq x \leq 1$. Considere uma amostra aleatória de tamanho 20 desta densidade, e seja $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Use o

Teorema Central do Limite para aproximar $\Pr\{Y \leq 10\}$.

Solução

A média de X é:

$$E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

O segundo momento é:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(2x)dx = \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{2}{4}$$

Logo, a variância de X é:

$$E(X^2) - \{E(X)\}^2 = (2/4) - (2/3)^2 = 1/2 - 4/9 = (9-8)/18 = 1/18$$

Seja $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Então a média de Y é $20(2/3)$ e sua variância é $(20)(1/18)$. Então:

$$\Pr(Y \leq 10) = \Pr\left(\frac{Y - 40/3}{\sqrt{\frac{20}{18}}} \leq \frac{10 - 40/3}{\sqrt{\frac{20}{18}}}\right) = \Pr(Z \leq -3.1623) = 0.08\%$$

Problema 13

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n iid $N(0, 1)$.

- Calcule $\Pr\{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 \leq 120\}$
- Calcule $\Pr\{80 \leq X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 \leq 120\}$
- Ache c tal que $\Pr\{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 \leq 100 + c\} = 0.95$

Solução

Os X_i^2 são iid Qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Logo:

$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2$ tem densidade Qui-quadrado com 100 graus de liberdade, e sua média é 100 e sua variância é 200.

$$a) \Pr(Y \leq 120) = \Pr\left(\frac{Y - 100}{\sqrt{200}} \leq \frac{120 - 100}{\sqrt{200}}\right) \approx \Phi\left(\frac{120 - 100}{\sqrt{200}}\right) = \Phi(1.4142) = 92.14\%$$

$$b) \Pr(80 \leq Y \leq 120) = \Pr\left(\frac{80 - 100}{\sqrt{200}} \leq \frac{Y - 100}{\sqrt{200}} \leq \frac{120 - 100}{\sqrt{200}}\right) \approx \Phi\left(\frac{120 - 100}{\sqrt{200}}\right) - \Phi\left(\frac{80 - 100}{\sqrt{200}}\right) = \Phi(1.4142) - \Phi(-1.4142) = 84.27\%$$

- Ache c tal que: $\Pr\{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{100}^2 \leq 100 + c\} = 0.95$

Por argumentos análogos aos dos itens anteriores temos:

$$\Phi\left(\frac{100 + c - 100}{\sqrt{200}}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{200}}\right) = 95\% \Leftrightarrow \left(\frac{c}{\sqrt{200}}\right) = 1.645 \Rightarrow c = 1.645\sqrt{200} = 23.2638$$

Problema 14

A probabilidade de você ter um vizinho chato é 10%. Você mora num prédio com 120 apartamentos, e na reunião de condomínio costumam aparecer 1/3 dos moradores. Qual a probabilidade de existirem menos de 2 chatos numa reunião de condomínio?

Problema 15

Uma tabela contém os dígitos 0 a 9 espalhados aleatoriamente. Você escolhe 25 dígitos da tabela. Qual a probabilidade de que a média destes dígitos esteja entre 4 e 6?

Problema 16

Você está encarregado da compra de champagne para uma festa de reveillon. Sabe-se que, na média, uma pessoa consome 360 ml de champagne, com um desvio padrão de 90ml. Existem 50 convidados na sua festa.

- a) Você comprou 22 garrafas de champagne, cada uma com 750 ml. Qual a probabilidade da champagne não ser suficiente, isto é, do consumo total exceder as 22 garrafas?
- b) Qual a quantidade (em ml) de champagne que você deve comprar para ter certeza que o consumo total só vai exceder esta quantidade 5% do tempo? E 10% do tempo?

Solução

a) Seja X_i a quantidade de champagne (em ml) consumida pela i -ésima pessoa. Então X_i é uma variável com média 360 ml e desvio padrão 90.

Seja \bar{X} o consumo médio de champagne dos seus 50 convidados. Então \bar{X} também tem média 360 ml, mas o desvio

padrão é agora $\sqrt{\frac{90}{50}}$.

Seja $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ o consumo total de champagne na sua festa. Y é uma variável aleatória com média $50(360)$ ml e desvio

padrão $\sqrt{(50)(90)}$ ml.

As 22 garrafas que você comprou correspondem a $22(750) = 16500$ ml = 16.5 l. Esta quantidade não será suficiente se Y , o consumo total na festa, for maior que 16500 ml. Mas, a probabilidade deste evento ocorrer é:

$$\begin{aligned} \Pr(Y > 16500) &= \Pr\left(\frac{Y - 18000}{50(90)} > \frac{16500 - 18000}{50(90)}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{16500 - 18000}{50(90)}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-1}{3}\right) = 63.06\% \end{aligned}$$

- b) Qual a quantidade (em ml) de champagne que você deve comprar para ter certeza que o consumo total só vai exceder esta quantidade 5% do tempo? E 10% do tempo?

Precisamos determinar a quantidade total de champagne, y , tal que:

$$\begin{aligned} \Pr(Y > y) &= \Pr\left(\frac{Y - 18000}{50(90)} > \frac{y - 18000}{50(90)}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{y - 18000}{50(90)}\right) = 5\% \\ \Rightarrow \Phi\left(\frac{y - 18000}{50(90)}\right) &= 95\% \Rightarrow \left(\frac{y - 18000}{50(90)}\right) = 1.645 \Rightarrow y = 25403 \text{ ml} = 25.4 \text{ litros} \end{aligned}$$

Se queremos descobrir a quantidade tal que, em 10% das vezes faltará champagne na festa, precisamos encontrar y tal que:

$$\Pr(Y > y) = \Pr\left(\frac{Y-18000}{50(90)} > \frac{y-18000}{50(90)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{y-18000}{50(90)}\right) = 10\%$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{y-18000}{50(90)}\right) = 90\% \Rightarrow \left(\frac{y-18000}{50(90)}\right) = 1.2816 \Rightarrow y = 23767 \text{ ml} = 23.7 \text{ litros}$$

Problema 17

Um jogador de futebol acerta 70% dos pênaltis cobrados. Calcule a probabilidade de que, em 25 cobranças, ele acerte mais de 18 vezes:

- Aproximadamente pelo Teorema de DeMoivre e Laplace com correção de continuidade;
- Aproximadamente pelo Teorema de DeMoivre e Laplace sem correção de continuidade;
- Exatamente.

Solução

Seja Y o número de cobranças certas em 25 repetições (supostas independentes, e com probabilidade fixa de sucesso, igual a 70%). Então Y é uma variável Binomial com parâmetros $n = 25$ e $p = 70\%$.

Note que $E(Y) = n.p = 25(0.7) = 17.5$ e $\text{VAR}(Y) = n.p.q = 25(0.7)(0.3) = 5.25$

Pelo teorema de DeMoivre e Laplace, a variável: $\frac{Y-17.5}{\sqrt{5.25}}$ é aproximadamente $N(0,1)$.

Queremos encontrar $\Pr(Y > 18)$.

- a) O valor aproximado desta probabilidade usando a correção de continuidade é:

$$\Pr(Y > 18) \approx \Pr(Y > 18.5) \approx \Pr\left(\frac{Y-17.5}{\sqrt{5.25}} > \frac{18.5-17.5}{\sqrt{5.25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{18.5-17.5}{\sqrt{5.25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{18.5-17.5}{\sqrt{5.25}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(0.4364) = 1 - 0.6687 = 33.13\%$$

- b) O valor aproximado desta probabilidade sem correção de continuidade é:

$$\Pr(Y > 18) \approx \Pr\left(\frac{Y-17.5}{\sqrt{5.25}} > \frac{18-17.5}{\sqrt{5.25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{18-17.5}{\sqrt{5.25}}\right) = 1 - \Phi(0.2182) = 1 - 0.5864 = 41.36\%$$

- c) O valor exato desta probabilidade é encontrado avaliando-se o somatório:

$$\Pr(Y > 18) = \sum_{y=19}^{25} \binom{25}{y} (0.7)^y (0.3)^{25-y} = 34.07\% \quad \text{Por que o somatório começa em 19 ao invés de 18?}$$