Estatística para Metrologia

Aula 2

Mônica Barros, D.Sc.

Março de 2008

Definições básicas – Introdução à Probabilidade

Probabilidades – Introdução

- Probabilidade faz parte do nosso dia a dia, por exemplo:
  - "A previsão da meteorologia é de (grande chance de) chuvas ao final do dia"
  - "O Flamengo possui (MUITAS!!!) chances matemáticas de chegar à final"
  - A probabilidade do candidato XYZ chegar ao 2o. Turno das eleições presidenciais é pequena...
  - A probabilidade da taxa SELIC cair na próxima reunião do COPOM é alta...

Probabilidades – Introdução

- Em resumo: estamos SEMPRE falando sobre probabilidades no nosso dia a dia, resta saber como quantificá-las, e quais os MODELOS mais comuns na prática.

- Na terminologia usual, a probabilidade reflete a chance de um determinado evento ocorrer.
- Quanto maior a probabilidade, maior a chance de ocorrência de um acontecimento.

- IMPORTANTE: probabilidade é um número entre 0 e 1 sempre!

Experiência Aleatória

- E por que é necessário estudar probabilidades?
  - Sempre que lidamos com experiências aleatórias, ou seja, toda vez em que o "mundo" não é determinístico (quase sempre...)
- Experiência aleatória
  - **Aquela cujo resultado não pode ser conhecido antes da realização da mesma**, por exemplo:
    - O resultado da jogada de um dado;
    - O número de carros que passam num posto de pedágio num intervalo de meia hora;
    - A cotação do dólar em 02/03/2005;
    - Os números que vão "sair" no concurso da Mega-Sena da próxima semana;
    - A carga no Sudeste às 18 horas de amanhã.

Experiência Aleatória

- Mas... note que, **embora você não saiba exatamente qual o resultado da experiência aleatória, também não existe ignorância completa** sobre o assunto!!!
  - No exemplo da jogada do dado, é claro que os resultados possíveis são {1, 2, 3, 4, 5, 6}, as faces do dado;
  - No caso da Mega-Sena, o conjunto de valores possíveis são os 6 números sorteados no conjunto {0, ..., 50} e nos outros exemplos podemos estabelecer um intervalo de valores máximos e mínimos!

Espaço Amostral

- É o conjunto de ***todos os possíveis resultados*** de uma experiência aleatória.
  - Total de nomes da lista telefônica do Rio de Janeiro (???)
  - Valores entre R$ 1.50 e R$ 150 (cotação do dólar em 02/03/2007)
  - Uma moeda é jogada 3 vezes, e observamos a seqüência de caras (H) e coroas (T). O espaço amostral é S = { HHH, THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT}
  - Uma lâmpada é fabricada e testada até queimar, e registra-se o tempo de ocorrência deste evento. O espaço amostral é $S = \{ x : x > 0 \}$
  - **O espaço amostral será denotado aqui por S.**

Evento

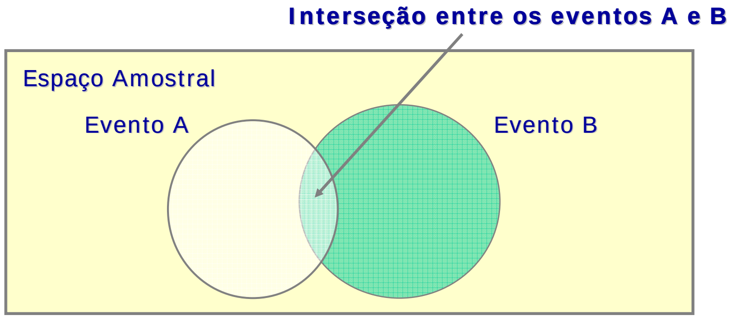
- É um conjunto de **possíveis resultados** de **uma experiência**, isto é, um subconjunto do espaço amostral.
  - Nomes na lista telefônica que comecem com P e tenham 5 letras
  - Cotação do dólar entre R$ 3.50 e R$ 8.50 em 02/03/2007.
  - O evento "sair 1 cara em 3 jogadas" é dado pelo conjunto: { HTT, THT, TTH}
  - O evento "lâmpada durar menos de 1000 horas" pode ser expresso como: $\{ x : 0 < x < 1000\}$

Evento

- Da definição segue diretamente que ambos ∅ e S são eventos.
- Se o espaço amostral é finito e possui n elementos, então existem 2^n subconjuntos deste espaço amostral, isto é, existem 2^n eventos.
- É claro que não podemos dizer quantos eventos existem associados a um espaço amostral infinito.

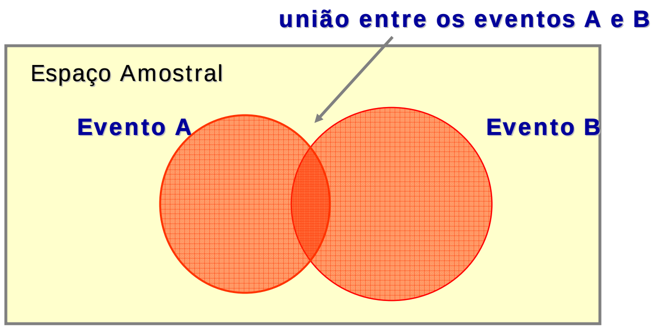
Propriedades de Eventos

- Se A e B são eventos – sua *interseção* também é um evento! Isso vale também para a interseção entre n eventos.



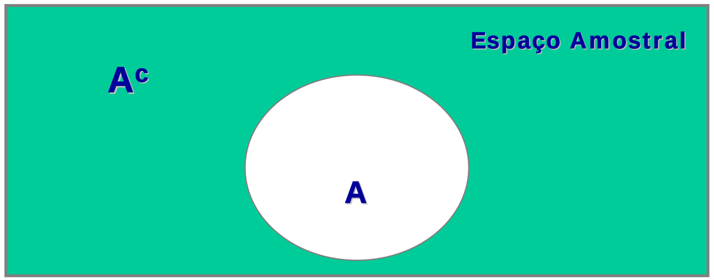
Propriedades de Eventos

- Se A e B são eventos – sua *união* também é um evento! Esta propriedade é válidade também para a união de n eventos.



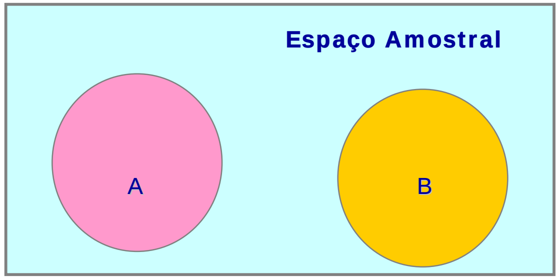
Propriedades de Eventos

- Se A é um evento, o complemento de A, denotado por A^C ou $\overline{A}$, também é um evento.



Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos mutuamente exclusivos – os elementos de A não pertencem a B e vice-versa, isto é, $A \cap B = \varnothing$.
  - Note que dois eventos complementares são mutuamente exclusivos



Definição axiomática de probabilidade

- A definição axiomática de probabilidade encara probabilidade como uma função cujo domínio é o espaço amostral.

- Logo, probabilidade é uma função que “sai” de S e “chega” no intervalo [0,1] e por isso precisamos saber “lidar” com conjuntos, pois o espaço amostral não é necessariamente numérico, como já vimos.

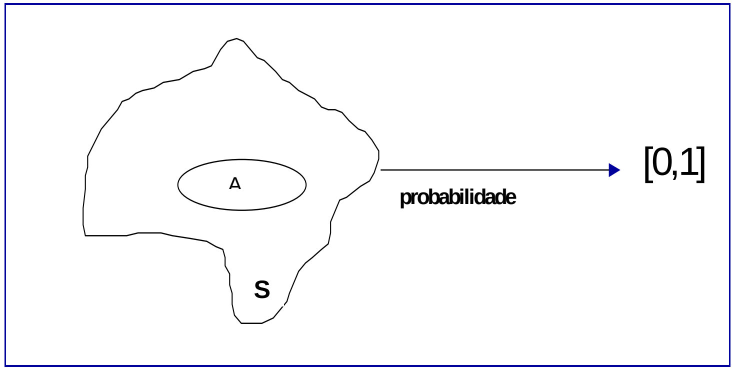
Definição axiomática de probabilidade

- Seja A um subconjunto qualquer do espaço amostral S.

- Podemos definir uma função P(.) tal que, se $A \subseteq S$, então P(A) é a probabilidade de que o resultado da experiência aleatória seja um elemento de A.

- Esta função P(.) "pega" elementos do espaço amostral e os leva num subconjunto dos reais, o intervalo [0,1].

Definição axiomática de probabilidade



- No entanto, nem toda função que sai de S e chega em [0,1] pode ser chamada de probabilidade, ela tem que satisfazer certas condições.

Definição axiomática de probabilidade

- Seja S o espaço amostral e A um subconjunto qualquer deste espaço. Uma *função de probabilidade* que atua sobre este espaço amostral satisfaz:
  - i) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq S$
  - ii) $P(S) = 1$
  - iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .....) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$

  onde os A_i são mutuamente exclusivos.
- Esta última propriedade é válida, em particular, quando existe um número finito de termos na união.

Definição axiomática de probabilidade

- A versão mais simples da expressão iii) será usada muitas vezes neste curso, e por isso a colocamos em destaque:

  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ se A_1 e A_2 forem mutuamente exclusivos.

- Estas três propriedades definem o tipo de função que pode ser chamada de "probabilidade".
- A princípio, existem infinitas funções que mapeiam S em [0,1], mas para ser chamada de “probabilidade”, uma função deve satisfazer os três requisitos anteriores.

Propriedades das Probabilidades

- A partir da definição podemos derivar diversas propriedades importantes.
- Seja A um subconjunto qualquer de S e A^c o seu complemento.
- Seja P(.) uma probabilidade definida em S. As seguintes propriedades decorrem da definição de probabilidade:
  - $P(\varnothing) = 0$
  - Para todo $A \subseteq S$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ onde A^c é o complemento de A
  - Para todo $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1 = P(S)$
  - Para quaisquer A_1 e A_2 em S tais que $A_1 \subseteq A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$

Propriedades das Probabilidades

- Esta última propriedade resulta numa certa “ordenação" dentro do espaço amostral, e diz simplesmente que, se um evento A_1 está contido noutro, a probabilidade de A_1 é menor ou igual à probabilidade do evento que o contém.
- A propriedade a seguir é uma das mais importantes na prática, e nos permite calcular a probabilidade da união de eventos que não são disjuntos.

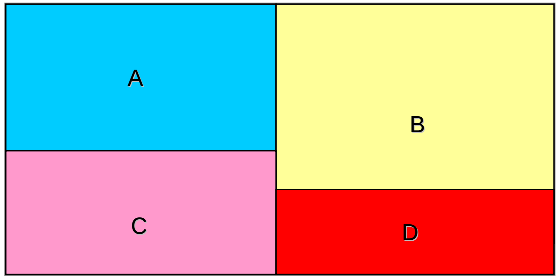
Propriedades das Probabilidades

- Para quaisquer A_1 e A_2 em S:
- $Pr(A_1 \cup A_2) = Pr(A_1) + Pr(A_2) - Pr(A_1 \cap A_2)$
- Em particular, se A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos: $Pr(A_1 \cup A_2) = Pr(A_1) + Pr(A_2)$
- Esta propriedade é às vezes chamada de "lei da adição".

Partição do Espaço Amostral

- É formada por eventos cuja interseção é nula e cuja união é o próprio espaço amostral.
- Por exemplo, pessoas numa pesquisa de mercado classificadas em classes de consumo (A, B, C, D) – as classes formam uma partição do espaço amostral.

Espaço Amostral



Em resumo: casos particulares da lei da adição

- Eventos mutuamente exclusivos
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pois $P(A \cap B) = 0$
- Eventos complementares
  - $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$, já que $P(A \cap A^c) = 0$
- Partição do espaço amostral (com 3 eventos)
  - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$

Exemplo – propriedades das probabilidades

- Um banco possui 10 fundos de investimento. Desses, 6 são de renda fixa, 4 são corporativos e 2 são de renda fixa e corporativos. Se escolhermos um fundo ao acaso, qual é a probabilidade dele ser de renda fixa ou corporativo?
- Solução (evento A: renda fixa, evento B: corporativo)

  Universo = 10 elementos

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

  $P(A) = 6/10 = 0.6$

  $P(B) = 4/10 = 0.4$

  $P(A \cap B) = 2/10 = 0.2$

  $P(A \cup B) = 0.6 + 0.4 – 0.2 = 0.8$ ou 80%

Probabilidade Condicional

- Como será que a probabilidade de um evento muda após sabermos que um outro evento ocorreu? Isso nos leva à idéia de probabilidade condicional.
- A idéia de probabilidade condicional é uma das mais importantes deste curso e está intimamente relacionada ao fato da ocorrência de um evento afetar ou não a probabilidade de ocorrência de outro evento.
- Uma probabilidade condicional nada mais é do que uma *probabilidade calculada* não mais a partir do espaço amostral inteiro S, e sim *a partir de um subconjunto de S*.

Probabilidade Condicional

- Motivação
- Um grupo de pessoas inclui 40 com diploma de curso superior, 20 microempresários e 10 que são, ao mesmo tempo, portadores de diploma do curso superior e microempresários.
- Calcule a probabilidade de alguém ser microempresário sabendo que ele tem diploma de curso superior.
- Sejam os eventos:

A = { pessoa tem diploma de curso superior }

B = { pessoa é um microempresário }

Seleciona-se uma das 50 pessoas aleatoriamente. Então:

Probabilidade Condicional

- $Pr(A) = 40/50$, $Pr(B) = 20/50$ e $Pr(A \cap B) = 10/50$
- Considere o seguinte evento: a pessoa é microempresária e sabe-se que ela tem diploma de curso superior.
- A probabilidade deste evento deve ser diferente da probabilidade da pessoa ser microempresária, por que agora o espaço amostral não consiste mais nas 50 pessoas originais, mas apenas naquelas que possuem diploma de curso superior.
- A probabilidade condicional de que uma pessoa seja microempresária sabendo-se que ela tem diploma de curso superior é dada por:

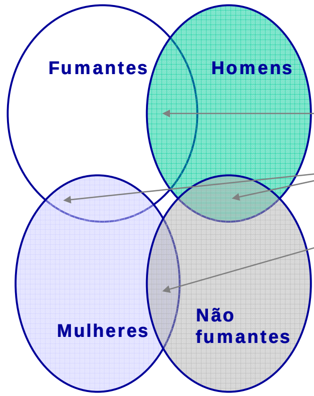
Probabilidade Condicional

- $P(A \cap B) / Pr(A) = 10 /40 = 0.25$
- Ou, em outras palavras, devemos olhar para as 10 pessoas na interseção dentre as 40 pessoas com diploma de curso superior. O nosso “mundo”, ao calcular a probabilidade condicional, restringe-se às 40 pessoas que têm curso superior, e não mais às 50 pessoas do grupo original.

Probabilidade Condicional

- Exemplo
- Em uma amostra de 100 funcionários de uma empresa:
  - 35 são homens e fumantes,
  - 28 são homens e não fumantes,
  - 17 são mulheres fumantes
  - 20 são mulheres e não fumantes.
  - Qual a probabilidade de um funcionário escolhido ao acaso ser fumante, dado que ele é homem?

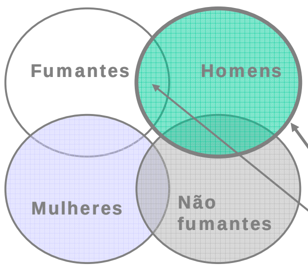
Probabilidade Condicional



	Fumantes	Não fumantes	Total
Homens	35	28	63
Mulheres	17	20	37
Total	52	48	100

Probabilidade Condicional

- Note que, quando definimos que o evento B ocorreu (o funcionário é homem), restringimos o espaço amostral à ocorrência do evento A (o funcionário é fumante)
- O novo universo passa a ser o próprio evento B



	Fumantes	Não fumantes	Total
Homens	35	28	63
Mulheres	17	20	37
Total	52	48	100

Novo universo

$P(A \cap B)$

Probabilidade Condicional

- Utilizando o número de elementos de cada conjunto, temos:
  - $P(A \mid B) = 35/63 = 0.556$
- Ou empregando as probabilidades:
  - $P(B) = 63/100 = 0.63$
  - $P(A \cap B) = 35/100 = 0.35$
  - $P(A \cap B)/P(B) = 0.35/0.63 = 0.556$

Probabilidade Condicional

- Estes exemplos nos fizeram **derivar naturamente** a **probabilidade condicional** do evento B dado o evento A.
- Em geral, a probabilidade do evento B dado o evento A (ou dado que o evento A ocorreu) é:
  $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$
- Analogamente: $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$
- Estas definições só são válidas quando os denominadores forem diferentes de zero.

Probabilidade Condicional

- Ao reordenarmos as expressões anteriores encontramos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B \mid A) \,.\, P(A) = P(A \mid B) \,.\, P(B)}$$

- Este resultado é também conhecido como **Teorema da Multiplicação.** Este teorema nos permite escrever uma probabilidade condicional em termos da probabilidade condicional "inversa", o que é útil quando uma delas for difícil de calcular. Em particular:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

Eventos Independentes

- Dois eventos A e B são chamados de independentes se:
  $Pr(A \cap B) = Pr(A) \,.\, Pr(B)$
- Do contrário, A e B são eventos *dependentes*.
- Independência é uma propriedade muito forte e tem um impacto direto sobre as probabilidades condicionais, como veremos a seguir.

Probabilidade Condicional

- Para eventos independentes,
  $P(A \mid B) = (P(A).\, P(B))/P(B) = P(A)$
- Ou seja, se A e B são independentes, a ocorrência de B não traz qualquer informação adicional sobre A.
- Analogamente, **se A e B são independentes**: $P(B \mid A) = P(B)$
- Em termos bastante informais, se A e B são independentes, um evento não tem "nada a ver" com o outro!

Independência e Dependência

- **Exemplo**
- **Tomou-se uma amostra com 1000 pessoas num shopping-center com o objetivo de investigar a relação entre renda familiar e posse de cartões de crédito.**

- **A partir dos dados da próxima tabela pergunta-se: existe independência entre "renda" e "posse de cartões de crédito"?**

Independência e Dependência

Renda Familiar → / Núm. Cartões ↓	< R$ 500	R$ 501 a R$1000	R$ 1001 a R$ 2000	> R$ 2001	
0	260	170	80	20	**530**
1	50	100	110	60	**320**
2 ou mais	20	25	45	60	**150**
	330	**295**	**235**	**140**	**1000**

- **Se existe independência entre as duas variáveis, então $Pr(A_i \cap B_j) = Pr(A_i).Pr(B_j)$ para todos i e j, onde A_i indica o nível de renda e B_j o número de cartões de crédito. Logo, basta provar que a igualdade acima não é válida para ALGUMA célula na tabela para concluir que as duas variáveis são dependentes. Se olharmos para a célula superior esquerda vemos que:**

Independência e Dependência

- **Pr(renda abaixo de R$ 500 E nenhum cartão) = 0.26**

- **Mas:**
  - **Pr(renda abaixo de R$ 500) = 330/1000 = 0.33**
  - **Pr(0 cartões de crédito) = 530/1000 = 0.53**

- **E como $0.26 \neq (0.33)(0.53)$, segue que as variáveis "renda familiar" e "número de cartões de crédito" são dependentes.**

Exemplo

- **Uma caixa contém R bolas vermelhas e B bolas azuis. Vamos tirar 2 bolas da caixa sem repô-las. Qual a probabilidade p da primeira bola ser vermelha e da segunda ser azul?**
- **Solução**

  Sejam A e B os seguintes eventos:

  A = {1a. bola é vermelha}

  B = {2a. bola é azul}
- **Se o evento A ocorreu, uma bola vermelha foi tirada da caixa. Como não há reposição, a probabilidade de obter uma bola azul na 2a. retirada é:**

Exemplo

$$\Pr(B \mid A) = \frac{B}{R+B-1}$$

- O evento $(A \cap B)$ é o evento {1a. bola é vermelha e a 2a. bola é azul}, e sua probabilidade é:

$$P(A \cap B) = p = P(A).P(B \mid A) = \frac{R}{R+B}.\frac{B}{R+B-1}$$

Probabilidade Condicional

- Como será que a probabilidade de um evento muda após sabermos que um outro evento ocorreu? Isso nos leva à idéia de probabilidade condicional.
- Uma probabilidade condicional nada mais é do que uma *probabilidade calculada* não mais a partir do espaço amostral inteiro S, e sim *a partir de um subconjunto de S*.
- Já vimos que a definição de prob. condicional é:

  P (B | A) = P(A ∩ B)/P(A) e, analogamente,

  P (A | B) = P(A ∩ B)/P(B)

Probabilidade Condicional

- Estas duas últimas expressões em conjunto nos levam ao resultado conhecido como Teorema da Multiplicação:

  P(A ∩B) = P (B | A) . P(A) = P(A | B). P(B)

- A partir desta última expressão:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}}$$

Exemplo

- Numa certa cidade 40% das pessoas são homens e 60% mulheres. Também, 50% dos homens e 30% das mulheres fumam. Ache a probabilidade de que uma pessoa seja homem, dado que esta pessoa é fumante.
- Solução

  Pr (H) = 0.4 = probabilidade de selecionar um homem

  Pr (M) = 0.6 = probabilidade de selecionar uma mulher

  Seja S o evento: "uma pessoa é fumante". Então:

  Pr (S | H) = 0.5 e Pr (S | M) = 0.3.

  Desejamos encontrar Pr (H |S).

Exemplo

Pela definição de probabilidade condicional:

$$\Pr(H \mid S) = \frac{\Pr(H \cap S)}{\Pr(S)} = \frac{\Pr(S \mid H)\Pr(H)}{\Pr(S)}$$

- **Mas Pr (H) e Pr (S | H) são conhecidas, e então só é preciso calcular Pr (S) (a probabilidade de um fumante na população). Mas, note que:**

- **S = (S ∩ M) ∪ (S ∩ H) e os conjuntos (S ∩ M) e (S ∩ H) são disjuntos**

Pr (S) = Pr (S ∩ M) + Pr (S ∩ H) =
= Pr (S | H).Pr (H) + Pr (S | M).Pr (M) =
= (0.5) (0.4) + (0.3) (0.6) = 0.38

Exemplo

Finalmente:

$$\Pr(H \mid S) = \frac{\Pr(H \cap S)}{\Pr(S)} = \frac{\Pr(S \mid H)\Pr(H)}{\Pr(S)} = \frac{(0.5)(0.4)}{(0.38)} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19} = 0.5263$$

Independência

- **Dois eventos A e B são *independentes* se:**

  $\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)}$

- **Se A e B são independentes, então as probabilidades condicionais são iguais às incondicionais, isto é:**

  P(A | B) = (P(A). P(B))/P(B) = P(A)

  P(B | A) = P(B)

  - **Em outras palavras, se A e B são independentes, A “não traz qualquer informação sobre B” (e vice-versa).**

Independência para mais de dois eventos

- **Considere uma coleção de n eventos A_1, A_2, ..., A_n. Estes eventos são independentes se, e somente se:**

  i) $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$

  $= \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \ldots \Pr(A_n)$ e,

  ii) Toda sub-coleção de eventos contendo mais de dois e menos de n eventos é independente.

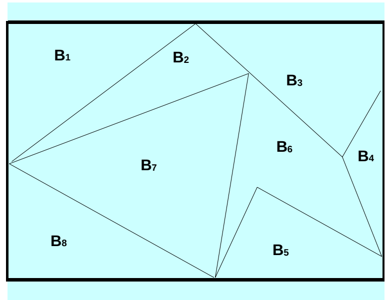
Independência para mais de dois eventos

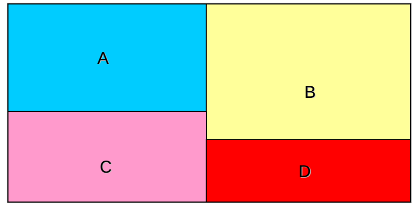
- No caso de 3 eventos A, B e C, a independência ocorre se TODAS as condições abaixo são satisfeitas:

1) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A).\Pr(B)$
2) $\Pr(A \cap C) = \Pr(A).\Pr(C)$
3) $\Pr(B \cap C) = \Pr(B).\Pr(C)$
4) $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A).\Pr(B).\Pr(C)$

Partição do Espaço Amostral

- Uma partição do espaço amostral é uma coleção de eventos mutuamente exclusivos cuja união é o próprio S (espaço amostral), como nas figuras a seguir.





Partição do Espaço Amostral

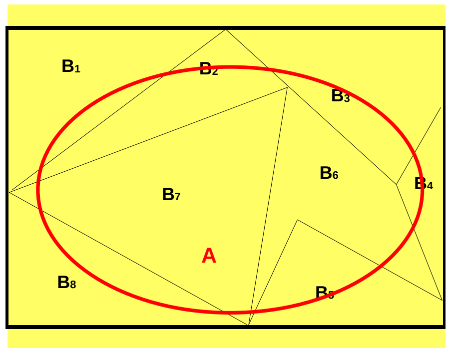
- Em termos formais, os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ formam uma partição do espaço amostral S se:

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$
2) $\cup B_i = S$
3) $\Pr(B_i) > 0$ para todo i

- ***Para que serve uma partição?***
- Podemos escrever qualquer evento no espaço amostral em termos das suas interseções com os conjuntos que formam uma partição do espaço amostral.

Partição do Espaço Amostral

- Suponha que A é um evento qualquer em S e $B_1, B_2, \ldots, B_8$ formam uma partição de S, como na figura a seguir.



Partição do Espaço Amostral

- Então podemos escrever o evento A em termos das suas interseções com cada elemento da partição (neste exemplo, B_1 a B_8).
- $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \ldots (A \cap B_k)$
- Mas, os $(A \cap B_i)$ são mutuamente exclusivos, e assim é muito fácil calcular a probabilidade da sua união (basta somar as probabilidades). Logo:
- $\boxed{Pr(A) = Pr(A \cap B_1) + Pr(A \cap B_2) + Pr(A \cap B_3) + \ldots + Pr(A \cap B_k)}$
- Mas, cada uma destas probabilidades pode ser escrita em termos de probabilidades condicionais.

Teorema da Probabilidade Total

- É um resultado que decorre diretamente das propriedades de uma partição, como mostrado nas transparências anteriores.
- Note que:
- $Pr(A) = Pr(A \cap B_1) + Pr(A \cap B_2) + Pr(A \cap B_3) + \ldots + Pr(A \cap B_k)$
- Mas:
- $\boxed{Pr(A \cap B_i) = Pr(B_i).Pr(A \mid B_i) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k.}$
- Combinando estes dois resultados fornece o teorema da probabilidade total.

Teorema da Probabilidade Total

- Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_k$ uma partição de S e A um evento qualquer em S. Então:
- $Pr(A) = Pr(B_1).Pr(A \mid B_1) + Pr(B_2).Pr(A \mid B_2) + \ldots + Pr(B_k).Pr(A \mid B_k)$
- O caso mais simples ocorre quando a partição é composta por apenas 2 eventos, B e seu complemento, B^c. Neste caso:
- $Pr(A) = Pr(B).Pr(A \mid B) + Pr(B^c).Pr(A \mid B^c)$

Teorema de Bayes

- É um resultado muito útil em Probabilidade, que "mistura" os teoremas da multiplicação e da probabilidade total.
- Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_k$ uma partição de S e A um evento qualquer em S. Então:

$$\boxed{\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)} = \frac{\Pr(A \mid B_i)\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)}}$$

- Para qualquer evento B_i na partição e qualquer A.

Teorema de Bayes

- Para que serve?
  - Muitas vezes conseguimos encontrar partições de S que são "óbvias" ou "naturais";
  - O teorema de Bayes nos permite **"inverter"** probabilidades condicionais, escrevendo uma probabilidade condicional que (esperamos!) é difícil de calcular diretamente em termos de probabilidades "fáceis" de calcular.

Teorema de Bayes

- Cuidados ao usar o Teorema de Bayes
- ESCREVA OS EVENTOS DE INTERESSE.
- NÃO TENTE RESOLVER OS PROBLEMAS "DE CABEÇA" PARA MINIMIZAR SUAS CHANCES DE ERRO!

Exemplo - Bayes

- Os funcionários de uma empresa se dividem em 3 grupos: economistas, engenheiros e analistas de sistemas. Estes funcionários podem ocupar cargos técnicos ou gerenciais. Sabemos que:
  - 40% dos funcionários são economistas,
  - 30% dos funcionários são engenheiros e
  - 30% dos funcionários são analistas de sistemas.
- O percentual de cada grupo ocupando cargos gerenciais é:
  - 30% dos economistas,
  - 40% dos engenheiros,
  - 10% dos analistas de sistemas.

Exemplo - Bayes

- a) Seleciona-se um funcionário aleatoriamente. Qual a probabilidade dele ocupar um cargo gerencial?

- b) Seleciona-se uma pessoa ao acaso na empresa e sabe-se que ela ocupa um cargo de gerência. Qual a probabilidade dela ter vindo de cada um dos três grupos, ou seja, dado que a pessoa é um gerente, qual a probabilidade dela ser economista, engenheiro ou analista de sistemas?

Exemplo - Bayes

- **Solução**

a) Considere os eventos:

A_1 = {economistas}, A_2 = {engenheiros}, A_3 = {analistas de sistemas}, G = {cargo de gerência}

Sabemos que: $Pr(A_1) = 0.40$, $Pr(A_2) = 0.30$, $Pr(A_3) = 0.30$. Também: $Pr(G|A_1) = 0.30$, $Pr(G|A_2) = 0.40$ e $Pr(G|A_3) = 0.10$.

Exemplo - Bayes

- Queremos encontrar Pr(G). Mas:

$Pr(G) = Pr(G \cap A_1) + Pr(G \cap A_2) + Pr(G \cap A_3) =$

$= Pr(A_1).\ Pr(G|A_1) + Pr(A_2).\ Pr(G|A_2) + Pr(A_3).\ Pr(G|A_3)$

- A substituição dos valores resulta em:

$Pr(G) = (0.40)(0.30) + (0.30)(0.40) + (0.30)(0.10) = (0.30)(0.90) = 27\ \%$

Exemplo - Bayes

- Queremos descobrir $Pr(A_i|G)$ para i = 1, 2, 3. Isto é uma aplicação direta do teorema de Bayes, já facilitada por que conhecemos o denominador (Pr(G)).
- Pr(G) = 0.27 (já calculado)
- $Pr(A_1|G) = Pr(G|A_1).\ Pr(A_1)/0.27 = (0.30)(0.40)/0.27 = 44.4\%$
- $Pr(A_2|G) = Pr(G|A_2).\ Pr(A_2)/0.27 = (0.40)(0.30)/0.27 = 44.4\%$
- $Pr(A_3|G) = Pr(G|A_3).\ Pr(A_3)/0.27 = (0.30)(0.10)/0.27 = 11.2\%$

Exemplo - Bayes

- Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:
  - 10% dos clientes pertencem à classe A.
  - 21% dos clientes pertencem à classe B.
  - 35% dos clientes pertencem à classe C.
  - 34% dos clientes pertencem à classe D.
- Dentre os clientes da classe A, 20% usam telefone pré-pago.
- Dentre os clientes da classe B, 40% usam telefone pré-pago.

Exemplo - Bayes

- Dentre os clientes da classe C, 90% usam telefone pré-pago.
- Dentre os clientes da classe D, 98% usam telefone pré-pago.
- Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes?
- Solução
- Aqui a partição "natural" da população já existe - os clientes estão divididos em classes de consumo. Se soubermos que alguém usa um telefone pré-pago, como isso afeta a probabilidade da pessoa estar em cada uma das classes de consumo?

Exemplo - Bayes

- Suponha que A, B, C, D indicam, respectivamente, os eventos "pertencer à classe A", "pertencer à classe B", etc...
- Seja G o evento "usar celular pré-pago". Então, do enunciado do problema:
- P(A) = 0.10, P(B) =0.21, P(C) = 0.35, P(D) = 0.34.
- P(G|A) = 0.20, P(G|B) =0.40, P(G|C) =0.90, P(G|D) = 0.98.

Exemplo - Bayes

- A probabilidade de um cliente escolhido ao acaso usar celular pré-pago é (pelo Teorema da Probabilidade Total):

$$P(G) = P(G \mid A)P(A) + P(G \mid B)P(B) + P(G \mid C)P(C) + P(G \mid D)P(D) =$$
$$= (0.20)(0.10) + (0.40)(0.21) + (0.90)(0.35) + (0.98)(0.34) = 0.7522$$

- Escolhe-se um cliente ao acaso, e observa-se que ele usa celular pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de consumo?

Exemplo - Bayes

- Agora o Teorema de Bayes entra em ação, mas, como já calculamos o denominador (a probabilidade de alguém ser cliente pré-pago), o cálculo se resume ao Teorema da Multiplicação.

$$P(A \mid G) = \frac{P(G \mid A)P(A)}{P(G)} = \frac{(0.10)(0.20)}{0.7522} = 2.66\%$$
$$P(B \mid G) = \frac{P(G \mid B)P(B)}{P(G)} = \frac{(0.21)(0.40)}{0.7522} = 11.17\%$$
$$P(C \mid G) = \frac{P(G \mid C)P(C)}{P(G)} = \frac{(0.35)(0.90)}{0.7522} = 41.88\%$$
$$P(D \mid G) = \frac{P(G \mid D)P(D)}{P(G)} = \frac{(0.34)(0.98)}{0.7522} = 44.30\%$$

Exemplo - Bayes

- Note que as probabilidades condicionais (dado que o cliente é pré-pago) são diferentes das incondicionais, e então existe DEPENDÊNCIA entre o uso do celular pré-pago e a classe de consumo!

- Por exemplo, a probabilidade de um cliente qualquer ser da classe A é 10%, mas se soubermos que o cliente é um usuário de pré-pago, a probabilidade dele ser de classe A cai para 2.66%.

Exemplo - Bayes

- No outro extremo, a probabilidade de um cliente qualquer ser da classe D é 34%. Dada a informação de que o cliente é “pré-pago”, a probabilidade dele ser “classe D” sobe para 44.3%.

Teorema de Bayes – para casa

- Uma revenda de carros usados oferece garantia total por 4 meses para todos os carros que vende, e este é o seu grande diferencial de marketing. Uma pesquisa anterior revelou que:

  12% dos carros vendidos são Peugeot.

  13% dos carros vendidos são Ford.

  18% dos carros vendidos são Fiat.

  16% dos carros vendidos são GM.

  20% dos carros vendidos são Volkswagen.

  21% dos carros vendidos são de outros fabricantes.

Teorema de Bayes – para casa

- Dentre os compradores de Peugeot, 7% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- Dentre os compradores de Ford, 8% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- Dentre os compradores de Fiat, 15% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- Dentre os compradores de GM, 10% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.

Teorema de Bayes – para casa

- Dentre os compradores de Volkswagen, 16% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.
- Dentre os compradores de outras marcas, 18% retornam à loja com alguma reclamação sobre o carro adquirido.

- Um comprador entra na loja com uma reclamação durante o período de vigência da garantia.
- Qual a probabilidade dele ter comprado um carro de cada uma das marcas (incluindo “outras”)?

Teorema de Bayes – para casa

- Uma empresa de telefonia quer saber se vale a pena disponibilizar internet de banda larga para seus clientes, e encomendou uma pesquisa de mercado, cujos resultados estão a seguir:
  - 15% dos clientes usam a internet mais de 30 horas por semana.
  - 23% dos clientes usam a internet entre 20 e 30 horas por semana.
  - 28% dos clientes usam a internet entre 10 e 20 horas por semana.
  - 34% dos clientes usam a internet menos de 10 horas por semana.

Teorema de Bayes – para casa

- Dentre os clientes que usam internet mais de 30 horas por semana, 90% estão interessados no acesso rápido (banda larga).

- Dentre os clientes que usam internet entre 20 e 30 horas por semana, 70% estão interessados no acesso rápido (banda larga).

- Dentre os clientes que usam internet entre 10 e 20 horas por semana, 45% estão interessados no acesso rápido (banda larga).

Teorema de Bayes – para casa

- Dentre os clientes que usam internet menos de 10 horas por semana, 25% estão interessados no acesso rápido (banda larga).

- Um cliente é escolhido aleatoriamente e está interessado na internet de banda larga. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes de usuário (mais de 30 horas, 20 a 30 horas, etc ...)?

Teorema de Bayes – para casa

- Uma certa forma de câncer ocorre à razão de 3 em 1000 pessoas. Desenvolveu-se um teste para detectar a doença.
- Se um paciente é sadio, existe 5% de chance de um alarme falso.
- Se um paciente tem a doença, existe 2% de chance de que o teste não consiga detectá-la.
- Qual a probabilidade da pessoa ter a doença sabendo que o resultado do teste foi positivo (acusou a existência da doença)?
- Atenção – o resultado deste problema vai ser surpreendente. Por que?

Teorema de Bayes – para casa

- Uma empresa de telefonia celular quer saber como funciona a relação entre o uso do telefone e a renda de seus clientes. Uma pesquisa anterior revelou que:
- 10% dos clientes pertencem à classe A.
- 25% dos clientes pertencem à classe B.
- 35% dos clientes pertencem à classe C.
- 30% dos clientes pertencem à classe D.

Teorema de Bayes – para casa

- Dentre os clientes da classe A, 25% usam telefone pré-pago.
- Dentre os clientes da classe B, 45% usam telefone pré-pago.
- Dentre os clientes da classe C, 90% usam telefone pré-pago.
- Dentre os clientes da classe D, 95% usam telefone pré-pago.

- Um cliente é escolhido aleatoriamente e tem o serviço pré-pago. Qual a probabilidade dele pertencer a cada uma das classes?