



Estatística para Metrologia

Aula 7

Maio de 2008
Mônica Barros, D.Sc.

monica@ele.puc-rio.br

1



Aula 7

- Vetores Aleatórios
 - Densidades Conjuntas
 - Densidades Marginais
 - Densidades Condicionais
 - Independência
 - Covariância e Correlação
 - Momentos Condicionais
 - Curva de Regressão

monica@ele.puc-rio.br

2

Objetivos

- Na prática, freqüentemente encontramos variáveis aleatórias em conjunto, por exemplo:
 - Preço e venda de um produto
 - Número de passageiros num vôo da Ponte Aérea e horário de embarque
 - IBOVESPA e Risco Brasil
 - Juros, Taxa de Câmbio, Inflação, Nível de Atividade da Indústria e Risco Brasil
- Como estudar o comportamento destas variáveis em conjunto? Este é o nosso objetivo no Cap. 5 do livro.

monica@ele.puc-rio.br

3

Objetivos

- Encontrar distribuições de probabilidade *conjuntas* para expressar a relação entre duas ou mais variáveis aleatórias.
- Encontrar distribuições de probabilidade *condicionais* que expressam o efeito de um subconjunto de variáveis sobre outro subconjunto de variáveis.
- Encontrar distribuições de probabilidade *marginais* que indicam o comportamento de uma única variável sem o efeito das outras.

monica@ele.puc-rio.br

4

Objetivos



- Definir e verificar as implicações da **independência** entre variáveis aleatórias.
- Definir **medidas da associação** entre duas variáveis, como a covariância e o coeficiente de correlação.
- Definir os **momentos condicionais**, estudar algumas de suas propriedades e apresentar a curva de regressão.

Vetor Aleatório



- Seja E uma experiência aleatória com espaço amostral S . Sejam X_1, X_2, \dots, X_k funções que associam números reais a cada resultado da experiência E .
- Então (X_1, X_2, \dots, X_k) é um **vetor aleatório** de dimensão k . O caso particular $k = 2$ será de interesse especial aqui, e estaremos apresentando as definições para vetores aleatórios bidimensionais.

Função de Prob. Conjunta



- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias discretas. A **função de probabilidade conjunta** de X_1 e X_2 é uma função não negativa $f(x_1, x_2)$ tal que:
- $\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = f(x_1, x_2)$
- Esta definição pode ser estendida de maneira trivial para uma n -upla de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n . Analogamente ao caso unidimensional, o somatório da função de probabilidade conjunta para todos os valores de X_1 e X_2 deve ser 1, isto é:

$$\sum_{\text{todo } x_1} \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

Densidade Conjunta



- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas. A **densidade conjunta** de X_1 e X_2 é uma função não negativa $f(x_1, x_2)$ tal que, para qualquer subconjunto A de \mathfrak{R}^2 :

$$\Pr\{(X_1, X_2) \in A\} = \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- Em particular, para calcularmos a probabilidade de X_1 e X_2 estarem num retângulo só precisamos calcular a integral dupla a seguir:

$$\Pr(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

Condição de Normalização



- A condição de normalização no caso bivariado é análoga ao caso univariado. A integral (ou somatório duplo) da densidade (ou função de probabilidade) conjunta deve ser 1. Ou seja:

- Para v.a. discretas

$$\sum_{\text{todo } x_1} \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1, x_2) = 1$$

- Para v.a. contínuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

monica@ele.puc-rio.br

9

Densidade Conjunta/Função de Probabilidade Conjunta



Interpretação

- Pode-se fazer uma analogia com a probabilidade da interseção de dois eventos.
- A **densidade** (ou a função de probabilidade **conjunta**) permite o cálculo de **probabilidades** relativas às **duas variáveis simultaneamente**, onde os efeitos das duas variáveis são levados em consideração ao mesmo tempo.

monica@ele.puc-rio.br

10

Densidade Conjunta/Função de Probabilidade Conjunta



- Mas, o que acontece se desejamos “olhar” para cada uma das variáveis separadamente, ignorando por completo o efeito da(s) outra(s)?
- Isso nos leva ao conceito de densidade (ou função de probabilidade) **marginal**.

monica@ele.puc-rio.br

11

Densidade Marginal



- Seja $f(x_1, x_2)$ a densidade (ou função de probabilidade conjunta) de X_1 e X_2 .
- A densidade marginal de X_1 é dada por:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 & \text{no caso contínuo} \\ \sum_{\text{todo } x_2} f(x_1, x_2) & \text{no caso discreto} \end{cases}$$

- Analogamente, a densidade marginal de X_2 é dada por:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 & \text{no caso contínuo} \\ \sum_{\text{todo } x_1} f(x_1, x_2) & \text{no caso discreto} \end{cases}$$

monica@ele.puc-rio.br

12

Densidade Marginal



- Nota
- A rigor, no caso discreto, deveríamos chamar $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$ de funções de probabilidade marginais.
- É importante perceber que as densidades marginais definidas na página anterior nos permitem calcular probabilidades para uma variável **IGNORANDO COMPLETAMENTE** o efeito da outra variável. Por exemplo:

$$\Pr(a < X_1 < b) = \int_a^b f_1(x_1) dx_1$$

- que seria a expressão usada se X_2 “não existisse”.

Densidade Condicional



- Densidade Condicional de X_2 dado X_1

$$f(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \text{ desde que } f_1(x_1) > 0$$

- Densidade Condicional de X_1 dado X_2

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \text{ desde que } f_2(x_2) > 0$$

- Note a semelhança entre a definição de densidades condicionais e a de probabilidade condicional. A densidade condicional expressa a distribuição de uma das variáveis sujeita a uma informação adicional, que é a ocorrência da outra variável.

Densidade Condicional



- Estas densidades nos permitem calcular probabilidade condicionais. Se as variáveis aleatórias são contínuas:

$$\Pr(a < X_2 < b | X_1 = x_1) = \int_a^b f(x_2 | x_1) dx_2$$

- É a densidade condicional de X_2 dado $X_1=x_1$. Analogamente podemos escrever a densidade condicional de X_1 dado $X_2=x_2$ como:

$$\Pr(c < X_1 < d | X_2 = x_2) = \int_c^d f(x_1 | x_2) dx_1$$

Densidade Condicional



- As definições no caso discreto são análogas.

- No **caso contínuo** não faz diferença se o intervalo (a, b) é fechado ou aberto, isto é, não faz diferença se substituirmos um ou mais dos sinais de " $<$ " por " \leq ".

- No **caso discreto** existe diferença se o intervalo é aberto ou fechado, por exemplo, desejarmos calcular $\Pr(a \leq X_2 \leq b)$ (ou a probabilidade condicional de X_2 estar neste intervalo dado $X_1 = x_1$) devemos incluir os pontos a e b no cálculo.

Densidade Condicional



- No caso contínuo surge uma dificuldade. Como interpretar a probabilidade condicional de que $(a < X_2 < b)$ dado que $X_1 = x_1$ já que o evento $\{X_1 = x_1\}$ tem probabilidade zero?
- A resposta é: **pense em x_1 como um parâmetro** desta distribuição condicional – à medida que este parâmetro varia, a distribuição condicional assume novas formas.

Exemplo 1



- Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com a seguinte função de probabilidade conjunta:

Pr(X = x) →	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
Pr(Y = y) ↓				
Y = 0	0.2	0.1	0.1	0
Y = 1	0.1	0.1	0.1	0.1
Y = 2	0	0.1	0.1	0

- Encontre as densidades marginais de X e Y.
- Encontre a densidade condicional de X dado Y = 0.
- Encontre a densidade condicional de Y dado X = 0.

Exemplo 1



- A função de probabilidade marginal de X é dada por:

$$f_x(x) = \Pr(X = x) = \sum_{\text{todo } y} f(x, y) = \sum_{\text{todo } y} \Pr(X = x, Y = y) = \sum_{y=0}^2 \Pr(X = x, Y = y)$$

- Logo:

$$f_x(0) = \Pr(X=0) = 0.2 + 0.1 + 0 = 0.3$$

$$f_x(1) = \Pr(X=1) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$f_x(2) = \Pr(X=2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$f_x(3) = \Pr(X=3) = 0 + 0.1 + 0 = 0.1$$

- A função de probabilidade marginal de Y é encontrada de maneira análoga. Verifique que: $\Pr(Y = 0) = \Pr(Y = 1) = 0.4$ e $\Pr(Y=2) = 0.2$.

Exemplo 1



- A função de probabilidade condicional de X dado Y = 0 é obtida pela divisão da conjunta pela probabilidade de Y ser igual a zero (0.4). Então:

$$f(x|Y = 0) = f(x,0)/\Pr(Y=0) = f(x,0)/0.4$$

para os diversos valores de X.

$$f(0|0) = \Pr(X = 0 | Y = 0) = f(0,0)/0.4 = 0.2/0.4 = 0.5$$

$$f(1|0) = \Pr(X = 1 | Y = 0) = f(1,0)/0.4 = 0.1/0.4 = 0.25$$

$$f(2|0) = \Pr(X = 2 | Y = 0) = f(2,0)/0.4 = 0.1/0.4 = 0.25$$

$$f(3|0) = \Pr(X = 3 | Y = 0) = f(3,0)/0.4 = 0/0.4 = 0$$



Exemplo 1

- A função de probabilidade condicional de Y dado X = 0 é a conjunta dividida pela probabilidade de X ser igual a zero, que é 0.3.

$$f(y | X = 0) = f(0, y) / \Pr(X = 0) = f(0, y) / 0.3$$

$$f(0|0) = \Pr(Y = 0 | X = 0) = f(0,0)/0.3 = 0.2/0.3 = 2/3$$

$$f(1|0) = \Pr(Y = 1 | X = 0) = f(0,1)/0.3 = 0.1/0.3 = 1/3$$

$$f(2|0) = \Pr(Y = 2 | X = 0) = f(0,2)/0.3 = 0/0.3 = 0$$

- Note que a soma destas probabilidades para todos os valores de Y é 1 (ou seja, a função de probabilidade condicional satisfaz a condição de normalização). O mesmo acontece para a condicional de X dado Y = 0 da página anterior.



Notas

- Deve-se ressaltar que as funções de probabilidade (e densidades) **marginais e condicionais** são funções de probabilidade (ou densidades) propriamente ditas, ou seja, devem obedecer a **condição de normalização**, como observado neste exemplo.
- A densidade (ou função de probabilidade **conjunta**) deve satisfazer uma **condição de normalização que envolve uma integral ou somatório duplo** (no caso de um vetor aleatório de dimensão 2, como o que estamos tratando aqui).



Exemplo 2

- Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = c \cdot e^{-x/2} \cdot e^{-y/3} \text{ se } x > 0 \text{ e } y > 0$$

- Encontre a constante c tal que f(x, y) seja uma densidade.
- Calcule as densidades marginais de X e Y.
- Calcule Pr (X > 2).
- Calcule Pr (1 < Y < 3)



Exemplo 2

- A constante é encontrada a partir da condição de normalização, isto é, fazendo a integral dupla sobre todos os valores de X e Y igual a um.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy &= 1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c \cdot e^{-x/2} \cdot e^{-y/3} dx dy = \int_0^{\infty} c \cdot e^{-y/3} dy \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = \\ &= \int_0^{\infty} c \cdot e^{-y/3} \left(0 - \frac{1}{(-1/2)} \right) dy = \int_0^{\infty} 2 \cdot c \cdot e^{-y/3} dy = 2 \cdot c \cdot \left(0 - \frac{1}{(-1/3)} \right) = 6 \cdot c \end{aligned}$$

- Então $6c = 1 \Rightarrow c = 1/6$

Exemplo 2



- A densidade marginal de X é:

$$f_x(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{6} \cdot e^{-x/2} \cdot e^{-y/3} dy = \frac{1}{6} e^{-x/2} \int_0^{\infty} e^{-y/3} dy = \frac{e^{-x/2}}{6} \cdot \left(0 - \frac{1}{(-1/3)} \right) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \text{ se } x > 0$$

- Ou seja, X tem densidade Exponencial com média 2.

Exemplo 2



- A densidade marginal de Y é:

$$f_y(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{6} \cdot e^{-x/2} \cdot e^{-y/3} dx = \frac{1}{6} e^{-y/3} \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = \frac{e^{-y/3}}{6} \cdot \left(0 - \frac{1}{(-1/2)} \right) = \frac{1}{3} e^{-y/3} \text{ se } y > 0$$

- Isto é, Y é Exponencial com média 3.

Exemplo 2



- A probabilidade de $X > 2$ é calculada a partir da densidade marginal de X.

$$\Pr(X > 2) = \int_2^{\infty} \frac{e^{-x/2}}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[0 - \frac{e^{-1}}{(-1/2)} \right] = e^{-1}$$

- De maneira semelhante, $\Pr(1 < Y < 3)$ é computada a partir da marginal de Y.

$$\Pr(1 < Y < 3) = \int_1^3 \frac{e^{-y/3}}{3} dy = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{(1/3)} \right) \cdot (e^{-3/3} - e^{-1/3}) = e^{-1/3} - e^{-1} = 0.7165 - 0.3679 = 0.3486$$

Exemplo 2



- Nota:
- A probabilidade de $X > 2$ poderia ter sido calculada também através da densidade conjunta, notando-se que os seguintes eventos são equivalentes:

$$\{X > 2\} = \{X > 2 \cap Y \text{ qualquer}\} = \{X > 2 \cap Y > 0\}$$

$$\Pr\{X > 2\} = \int_2^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{6} e^{-x/2} e^{-y/3} dx dy = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} e^{-y/3} dy \{+ 2e^{-2/2}\} = \frac{1}{3} e^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y/3} dy = \frac{1}{3} e^{-1} \{+ 3\} = e^{-1}$$

Exemplo 2



- Analogamente, a probabilidade de $1 < Y < 3$ poderia ter sido calculada também através da densidade conjunta usando um argumento semelhante ao do slide anterior.

Exemplo 3



- Suponha que X e Y têm densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{3} + x^2 \text{ onde } 0 < x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2$$

- 1) Calcule as densidades marginais de X e Y.
- 2) Encontre a densidade condicional de Y dado $X = x$.
- 3) Encontre a densidade condicional de X dado $Y = y$.

Exemplo 3



- A densidade marginal de X é:

$$f_x(x) = \int_0^2 f(x, y) dy = \int_0^2 \left(\frac{xy}{3} + x^2 \right) dy = 2 \cdot x^2 + \frac{2 \cdot x}{3}, \text{ onde } 0 < x \leq 1$$

- A densidade marginal de Y é:

$$f_y(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \left(\frac{xy}{3} + x^2 \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}, \text{ onde } 0 \leq y \leq 2$$

- A densidade condicional de Y dado $X = x$ é dada por:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{xy}{3} + x^2}{2x + \frac{2x}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x + y/3}{x + 1/3} \right], \text{ onde } x \in (0, 1] \text{ e } y \in [0, 2]$$

Exemplo 3



- Note que existe um número infinito de densidades condicionais de Y dado $X = x$, cada uma para um valor de x diferente no intervalo $(0, 1]$.

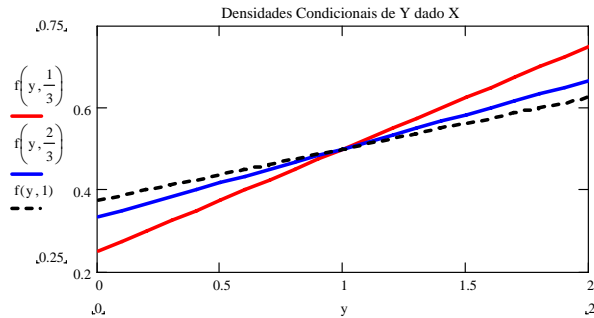
- Por exemplo, se $x = 1$, a densidade condicional de Y dado $X = 1$ é:

$$f(y|x=1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + y/3}{1 + 1/3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \left(1 + \frac{y}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(1 + \frac{y}{3} \right), \text{ onde } y \in (0, 2]$$

Exemplo 3



- Abaixo exibimos um gráfico com 3 densidades condicionais. Note que, à medida que o “parâmetro” x se altera, a forma da densidade condicional muda.



monica@ele.puc-rio.br

33

Exemplo 3



- A densidade condicional de X dado $Y = y$ é:

$$f(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{y}{2}\right)} = \frac{3x^2 + xy}{1 + y/2}, \text{ onde } x \in (0,1] \text{ e } y \in [0,2]$$

- Substituindo-se $Y = 1$ acima encontramos a densidade condicional de X dado $Y = 1$:

$$f(x|Y=1) = \frac{3x^2 + x}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}(3x^2 + x), \text{ onde } x \in (0,1]$$

- Se agora fazemos $Y = 2$ encontramos outra densidade condicional:

$$f(x|Y=2) = \frac{3x^2 + 2x}{1 + 1} = \frac{3x^2 + 2x}{2}, \text{ onde } x \in (0,1]$$

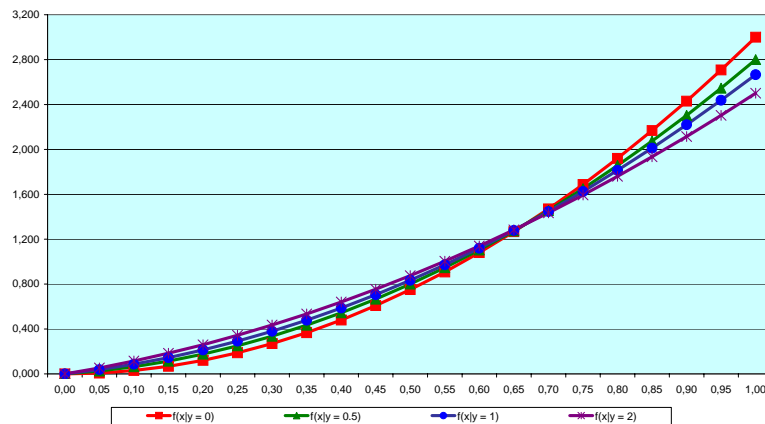
monica@ele.puc-rio.br

34

Exemplo 3



Densidades Condicionais de X dado Y = y



monica@ele.puc-rio.br

35

Exemplo (para casa)



- Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta: $f(x,y) = cy^2 + 2xy$ onde $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$

- Encontre a constante c que faz desta expressão uma densidade.

Encontre a densidade marginal de X .

- Encontre a densidade marginal de Y .
- Encontre a densidade condicional de X dado $Y = y$.
- X e Y são independentes? Por que? Justifique?

monica@ele.puc-rio.br

36

Independência



- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas ou discretas. Dizemos que X_1 e X_2 são **independentes** se sua densidade **conjunta** pode ser fatorada como o **produto das** respectivas densidades **marginais**. Isto é:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

- Em particular, no caso de duas variáveis discretas, esta igualdade deve valer para todos os valores possíveis de ambas as variáveis, e portanto, para demonstrar a dependência entre duas variáveis, basta mostrar que a igualdade não se verifica para algum par de valores de x_1 e x_2 .

Independência



Conseqüências

- Se X_1 e X_2 são independentes então:
 - As densidades condicionais são iguais às densidades marginais correspondentes.
 - Os momentos (média, variância, etc ...) condicionais são iguais aos momentos correspondentes calculados a partir das densidades marginais.
 - Se X_1 e X_2 são independentes com densidades marginais $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$ então:

Independência



Conseqüências

$\Pr(a < X_1 < b, c < X_2 < d) = \Pr(a < X_1 < b) \cdot \Pr(c < X_2 < d)$ para quaisquer $a < b, c < d$.

4) Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias **independentes** com densidades marginais $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$. Então, se todos os valores esperados abaixo existirem:

$$E[u(X_1)v(X_2)] = E[u(X_1)] \cdot E[v(X_2)]$$

Independência



Conseqüências

O valor esperado de um produto de funções de variáveis aleatórias onde **cada função depende apenas de uma das variáveis aleatórias** é **igual ao produto dos valores esperados das funções individuais sempre que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 forem independentes**.



Exemplo 1 - continuação

- Sejam X e Y variáveis discretas com função de probabilidade conjunta do Exemplo 1:

$\Pr(X=x) \rightarrow$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$\Pr(Y=y) \downarrow$				
$Y=0$	0.2	0.1	0.1	0
$Y=1$	0.1	0.1	0.1	0.1
$Y=2$	0	0.1	0.1	0

- X e Y são independentes? Por que?**

Por exemplo,

$$\Pr(X=0) = 0.2 + 0.1 + 0 = 0.3 \text{ e}$$

$$\Pr(Y=0) = 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0 = 0.4$$

$$\text{Mas, } \Pr(X=0, Y=0) = 0.2 \neq (0.3)(0.4).$$

Logo, X e Y não são independentes (são dependentes) !



Covariância

- A covariância entre as variáveis X_1 e X_2 é definida como:

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_1, X_2) &= E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = E[X_1 \cdot X_2 - \mu_1 \cdot X_2 - \mu_2 \cdot X_1 + \mu_1 \cdot \mu_2] = \\ &= [E(X_1 \cdot X_2) - \mu_1 \cdot E(X_2) - \mu_2 \cdot E(X_1) + \mu_1 \cdot \mu_2] = \\ &= E(X_1 \cdot X_2) - \mu_1 \cdot \mu_2 \end{aligned}$$

- Onde $\mu_1 = E(X_1)$, $\mu_2 = E(X_2)$ são as médias de X_1 e X_2 , computadas a partir das densidades marginais.
- Note que a **covariância** é um valor esperado que **envolve simultaneamente as duas variáveis**, por isso ela deve ser calculada a partir da densidade conjunta de X_1 e X_2 .

Covariância



- Da expressão anterior pode-se notar que a **variância** é apenas um **caso particular** da covariância. Por exemplo, fazendo $X_2 = X_1$ na última expressão leva a:

$$\text{COV}(X_1, X_1) = E[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] = E[(X_1 - \mu_1)^2] = \text{VAR}(X_1)$$

- Obviamente poderíamos ter derivado a variância de X_2 pelo mesmo procedimento.

Coefficiente de Correlação



- O coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 , denotado por ρ , é definido como:

$$\rho = \frac{\text{COV}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{VAR}(X_1)} \cdot \sqrt{\text{VAR}(X_2)}}$$

- O **coeficiente de correlação** é a covariância dividida pelo produto dos desvios padrões das duas variáveis, ou seja, é uma **medida padronizada** (e **adimensional**) da covariância.

Coeficiente de Correlação



- Se X_1 e X_2 são independentes, então $\rho = 0$ (X_1 e X_2 são descorrelatados).
- A recíproca deste fato NÃO É verdadeira, ou seja, **CORRELAÇÃO ZERO NÃO IMPLICA EM INDEPENDÊNCIA.**
- A única instância em que as duas condições são equivalentes (correlação zero e independência) é no caso de variáveis Normais.

Coeficiente de Correlação



- O coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 é um valor entre -1 e +1. Além disso, $\rho = +1$ ou $\rho = -1$ se e somente se, X_1 e X_2 é uma função linear de X_1 .
 $\rho = +1 \Leftrightarrow X_2 = aX_1 + b$ onde $a > 0$
 $\rho = -1 \Leftrightarrow X_2 = aX_1 + b$ onde $a < 0$
- Mas, é importante notar que **o coeficiente de correlação é uma medida de associação LINEAR** entre as variáveis, ou seja, não diz nada sobre a relação entre X_1^j e X_2^k onde j e k são diferentes de 1.

Momentos Condicionais



- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas ou discretas.
- Podemos definir o valor esperado condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ como o valor esperado de X_2 usando-se a densidade condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$ (ao invés de usarmos da densidade marginal de X_2).
- No caso contínuo:

$$E(X_2 | X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \cdot f(x_2 | x_1) dx_2$$

Momentos Condicionais



- O caso discreto é análogo, apenas substituindo a integral pelo somatório para todo valor de X_2 .
- Note que $E(X_2 | X_1 = x_1)$ é uma função de x_1 , e x_1 é um valor da variável aleatória X_1 .
- O gráfico da função $E(X_2 | x_1)$ versus os valores possíveis de x_1 é chamado de **regressão de X_2 em x_1** ou **Curva de Regressão de X_2 em X_1** .

Momentos Condicionais



- Pode-se mostrar que, se X_1 e X_2 têm densidade Normal bivariada (uma densidade importante que estudaremos posteriormente), a curva de regressão de X_2 em X_1 é, na verdade, uma reta, ou seja, $E(X_2 | X_1 = x_1)$ tem a forma: $a \cdot x_1 + b$.
- É claro que uma “curva” de regressão linear não é a regra, é a exceção, mas uma exceção tão importante que dá origem aos métodos de regressão linear usados na prática!

Momentos Condicionais



- Analogamente à definição de média condicional, podemos também definir a variância condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$. Esta é a variância calculada usando-se a densidade condicional ao invés da marginal. Por exemplo, no caso contínuo:

$$\text{VAR}(X_2 | X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mu_{2|1})^2 f(x_2 | x_1) dx_2 \quad \text{onde}$$
$$\mu_{2|1} = E(X_2 | X_1 = x_1) \text{ é a média condicional}$$

Exemplo 3



- Considere novamente o Exemplo 3, isto é, X e Y têm densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{3} + x^2 \quad \text{onde } 0 < x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2$$

- Já vimos que a densidade condicional de Y dado $X = x$ é:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{xy}{3} + x^2}{\frac{2x}{3} + 2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x + y/3}{x + 1/3} \right], \quad \text{onde } x \in (0, 1] \text{ e } y \in [0, 2]$$

- Note que nesta densidade, Y é a variável aleatória, e X deve ser pensado como um parâmetro que caracteriza a densidade (um “número”).

Exemplo 3



- A média e variância condicionais de Y dado $X = x$ são calculadas a partir desta densidade.

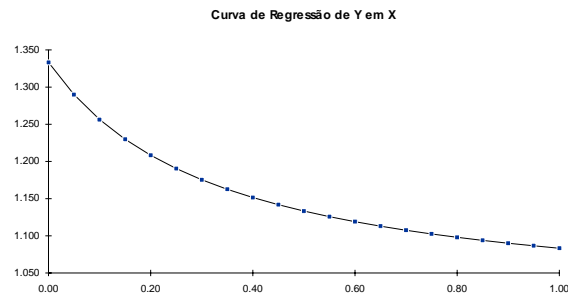
$$E(Y | X = x) = \int_0^2 y \cdot f(y|x) dy = \int_0^2 y \cdot \left(\frac{x + y/3}{2(x + 1/3)} \right) dy = \frac{1}{2(x + 1/3)} \int_0^2 y \cdot \left(x + \frac{y}{3} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{2(x + 1/3)} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{9} \right) \Big|_{y=0}^2 = \frac{1}{2(x + 1/3)} \left(2x + \frac{8}{9} \right) = \frac{9x + 4}{9x + 3}$$

- Note que isso é uma função de X .
- Calcule a variância condicional (para casa).

Exemplo 3



- A curva de regressão de Y em X é o gráfico da média condicional calculado na página anterior para todo valor de X (isto é, X no intervalo (0,1)).



monica@ele.puc-rio.br

53

Exemplo 4 (para casa)



- Considere a seguinte densidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \cdot e^{-y/2}, \quad x > 0, y > x$$

- a) Ache a densidade marginal de X.
- b) Ache a densidade marginal de Y.
- c) Calcule $\Pr(X > 1 \mid Y < 4)$

Dica:

$$\int u \cdot e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} \left(u - \frac{1}{a} \right)$$

monica@ele.puc-rio.br

54

Exemplo 5 (para casa)



- Considere as seguintes distribuições conjuntas:

- a) $f(x, y) = 4 \cdot x \cdot y \cdot \exp\{-x^2 - y^2\}$ para $x \geq 0, y \geq 0$

- b) $f(x, y) = 3 \cdot x^2 / y^3$ para $0 \leq x \leq y \leq 1$

- Em cada caso, determine se X e Y são independentes.

monica@ele.puc-rio.br

55

Exemplo 6 (para casa)



- Sejam X e Y v.a. contínuas com densidade conjunta:

$$f(x, y) = cx^2 + xy \quad \text{onde } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1$$

- Encontre a constante \underline{c} que faz desta expressão uma densidade.
- Encontre a densidade marginal de X.
- Encontre a densidade marginal de Y.
- Encontre a densidade condicional de Y dado $X = x$.
- Ache a média condicional de Y dado $X = x$.
- X e Y são independentes? Por que? Justifique.

monica@ele.puc-rio.br

56